2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 14. 3. 2022.

Úloha 1. Pro daná přirozená čísla p, q, r, s vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+p)(k+q)}{(k+r)(k+s)}.$$

Úloha 2. Nalezněte všechny funkce $f : [0,1] \to [0,1]$ takové, že pro všechna $x \in [0,1]$ platí

$$\{f(x)\} \sin^2 x + \{x\} \cos f(x) \cos x = f(x)$$

a

$$f(f(x)) = f(x).$$

Úloha 3. Pro která přirozená n existují matice A, B, C řádu n s celočíselnými prvky splňující $ABC + BCA + CAB = I_n$?

Úloha 4. Buďte x, y, z nezáporná čísla splňující $x+y+z = 1$. Dokažte

$$(1-x)\sqrt{x(1-y)(1-z)} + (1-y)\sqrt{y(1-z)(1-x)} + (1-z)\sqrt{z(1-x)(1-y)} \geq 4\sqrt{xyz}.$$

Úloha 5. Buď $\tau(k)$ počet dělitelů čísla k. Ukažte, že pro dostatečně velká n je $\tau(n!)$ dělitelem $n!$.

⋆ **Úloha 6.** Zjistěte, zda existuje kladné číslo d s následující vlastností: obarvíme-li každý bod roviny jednou z pěti barev, pak existují dva body stejné barvy vzdálené 1 nebo dva body stejné barvy vzdálené d.

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`