1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 28. 2. 2022.

Úloha 1. Nechť $M = \{-1, -2, \ldots, -2022\}$. Pro každou N neprázdnou podmnožinu M definujme $P(N)$ jako součin všech prvků z N. Jaký je součet $P(N)$ přes všechny možné neprázdné podmnožiny M?

Úloha 2. Uvažujme posloupnost mnohoúhelníků P_n takovou, že P_0 je rovnostranný trojúhelník se stranou délky 1 a vrcholy P_{n+1} jsou body v jedné a ve dvou třetinách délky každé strany P_n (například P_1 je pravidelný šestiúhelník o straně délky 1/3). Najděte $\lim_{n\to\infty} |P_n|$, kde $|P|$ značí obsah P.

Úloha 3. Množinu $A \subset \mathbb{R}$ nazveme *rozumnou*, pokud je omezená a pro libovolná (ne nutně různá) $a, b \in A$ je $(a-b)^2 \in A$. Reálné číslo r nazveme *chytré*, pokud existuje rozumná množina A takové, že $r \in A$. Nalezněte infimum množiny chytrých čísel.

Úloha 4. Nechť A je čtvercová matice řádu n mající jedničky na pozicích (i, j), kde $i + j$ je prvočíslo, a nuly jinde. Ukažte, že $|\det A|$ je druhou mocninou.

Úloha 5. V každém vrcholu čtvercové mřížky $n \times n$ sedí brouček. Během noci se každý brouček přesunul do středu nějakého ze čtverečků mřížky, a to takovým způsobem, že pokud dva broučci původně sousedili (tj. ve mřížce mezi nimi vedla hrana), tak buď zalezli do středu stejného čtverečku, nebo zalezli do středů dvou čtverečků sousedících hranou. Ukažte, že existuje brouček, který zalezl do středu čtverečku, v jehož vrcholu původně seděl.

Úloha 6. Nechť $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce taková, že pro každé $k = 0, 1, \ldots, n-1$ je

$$\int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Ukažte, že

$$\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \geq n^2.$$

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`