5. soutěžní série

10. 5. 2021

Úloha 1. Hoďme n krát mincí a zapišme výsledek ve tvaru $101\ldots011$. Označme $P(n)$ pravděpodobnost, že délky všech maximálních konstantních podřetězců výsledku mají stejnou paritu jako n. Ukažte, že pro n sudé je $P(n) = 2^{-n/2}$ a pro n liché je $P(n) = 2^{1-n}F_n$, kde F_n je n-té Fibonacciho číslo. (10 bodů)

Úloha 2. Nalezněte všechny polynomy p s reálnými koeficienty takové, že $p(p(x)) = (x^2 + x + 1)p(x)$ pro každé x. (10 bodů)

Úloha 3. Buď $\mathbb{Z}^d$ množina mřížových bodů v $\mathbb{R}^d$ a pro $A \subset \mathbb{Z}^d$ označme $D(A) = \{\|x - y\| : x, y \in A\}$ množinu vzdáleností množiny A. Ukažte, že

(a) $\mathbb{Z}^d$ lze rozdělit na dvě podmnožiny A, B takové, že $D(A) \neq D(\mathbb{Z}^d)$ a $D(B) \neq D(\mathbb{Z}^d)$.

(b) Pokud $A \cup B = \mathbb{Z}^d$ a $A \cap B \neq \emptyset$, pak $D(A) = D(\mathbb{Z}^d)$ nebo $D(B) = D(\mathbb{Z}^d)$. (10 bodů)

Úloha 4. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá v nule a nechť λ, μ jsou navzájem různá kladná reálná čísla. Ukažte, že limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(\lambda x) - f(\mu x)}{x}$$

existuje právě tehdy, když f je diferencovatelná v nule. (10 bodů)

Vaše řešení nahrávejte do moodlu. Je možno nahrát i více souborů. Uvítáme, pokud jména souborů budou indikovat, které úlohy soubor obsahuje.

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`