5. soutěžní série – řešení

1. Pro n sudé budou mít konstantní podřetězce sudou délku, právě když $a_{2k-1} = a_2k$ pro každé $k = 1, \dots, n/2$ (a_k značí výsledek k-tého hodu). Pravděpodobnost je evidentně $2^{-n/2}$. Pro n liché stačí ukázat, že počet možných hodů s řetězci liché délky je $Q(n) = 2F(n)$. Jistě $Q(1) = 2$ a $Q(2) = 2$ a platí rekurence $Q(n) = Q(n-1) + Q(n-2)$ (řetězec délky n má buď poslední dva hody stejné, pak jsme ho dostali jednoznačně z řetězce délky $n-2$ nebo poslední dva hody různé, pak jsme ho dostali jednoznačně z řetězce délky $n-1$).

2. Snadno uhodneme, že vyhovuje nulový polynom $p(x) = 0$. Pro nenulový polynom musíme mít na obou stranách rovnice polynomy stejného stupně, odkud dostáváme nutnou podmínku $(\deg p)^2 = 2 + \deg p$, takže hledáme kvadratický polynom. Jelikož rovnice $p(p(x)) = (x^2 + x + 1)p(x)$ platí pro všechna reálná x, platí i pro komplexní čísla. Pokud za x dosadíme (komplexní) kořen p, pak dostáváme podmínku $p(0) = 0$, takže hledaný polynom je tvaru $ax^2 + b$. Daná rovnice se po vydělení polynomem $p(x)$ stane $a(ax^2 + bx) + b = x^2 + x + 1 = a^2x^2 + abx + b$, což je splněno právě pro $a = b = 1$. Vyhovují polynomy $p(x) = 0$ a $p(x) = x^2 + x$.

3. (a) Množiny $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum x_i \text{ je sudé}\}$ a $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum x_i \text{ je liché}\}$ evidentně vyhovují — $D(A)$ ani $D(B)$ neobsahuje jedničku.

(b) Nechť $A \cap B \neq \emptyset$, BÚNO $0 \in A \cap B$ a $m = \sum x_i^2$, $\sqrt{m} \notin D(B)$. Pak $x \in A$. Buď nyní pro spor $\sqrt{n} \in D(\mathbb{Z}^n) \setminus D(A)$ a y takové, že $\sum y_i^2 = n$. Pak $y \notin A$ a také $x + y \notin A$, pak ale y, $x + y \in B$, tj. $\|(x + y) - y\| = \sqrt{m} \in D(B)$, spor.

4. Nechť limita existuje a je rovna A. Bez újmy na obecnosti $\lambda > \mu$, označme $\alpha = \frac{\mu}{\lambda} < 1$. Pak pro $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $|x| < \delta$ máme

$$A - \varepsilon < \frac{f(\lambda x) - f(\alpha\lambda x)}{x} < A + \varepsilon.$$

Postupně můžeme dosazovat $x\alpha^k$, $k = 1, 2, \dots, n$ a získáme

$$\alpha^k(A - \varepsilon) < \frac{f(\alpha^k\lambda x) - f(\alpha^{k+1}\lambda x)}{x} < \alpha^k(A + \varepsilon),$$

sečtením těchto rovnic vyjde

$$\frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}(A - \varepsilon) < \frac{f(\lambda x) - f(\alpha^{n+1}\lambda x)}{x} < \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}(A + \varepsilon),$$

pro $n \to \infty$ díky spojitosti v nule máme

$$\frac{A - \varepsilon}{1 - \alpha} \leq \frac{f(\lambda x) - f(0)}{x} \leq \frac{A + \varepsilon}{1 - \alpha}.$$

Odtud už z definice limity plyne $f'(0) = \frac{1}{\lambda}\frac{A}{1-\alpha} = \frac{A}{\lambda - \mu}$.
Nechť je naopak f diferencovatelná v nule, pak $\lim_{x\to 0} \frac{f(\lambda x) - f(0)}{\lambda x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(\mu x) - f(0)}{\mu x} = f'(0)$ a z věty o aritmetice limit vychází $\lim_{x\to 0} \frac{f(\lambda x) - f(\mu x)}{x} = (\lambda - \mu)f'(0) = A$.