5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 17. 5. 2021.

Úloha 1. Ukažte pro $n \geq 2$

$$\prod_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \leq \left(\frac{2^n - 2}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Úloha 2. Dva prvky a, b grupy G nazveme k-komutativní, pokud součin k prvků, z nichž každý je a nebo b, komutuje s každým jiným součinem k-prvků, z nichž každý je a nebo b. Ukažte, že množina všech k, pro něž jsou a, b k-komutativní, je rovna množině všech násobků nějakého čísla m.

Úloha 3. Nechť $1 \leq a_1, \ldots, a_n \leq m$ a $1 \leq b_1, \ldots, b_m \leq n$ jsou celá čísla. Ukažte, že z každé z posloupností umíme vybrat neprázdnou podposloupnost tak, že tyto dvě podposloupnosti mají stejný součet.

Úloha 4. Ukažte, že rovnoramenný trojúhelník ABB', $|AB| = |AB'|$ je možné rozdělit symetricky podle osy souměrnosti na sedm ostroúhlých rovnoramenných trojúhelníků, pokud $|\angle BAB'| \notin \{90°, 120°\} \cup [135°, 144°]$.

Úloha 5. Uvažujme posloupnost $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = \exp(-\sum_{k=0}^{n} a_k)$ pro $n \geq 1$. Pro jaká b je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^b$ konvergentní?

Úloha 6. Najděte všechna celá čísla p, pro která existuje celé číslo q, že polynom $P(x) = x^3 + px + q$ má různé celočíselné kořeny a také jeho derivace má různé celočíselné kořeny.