4. soutěžní série

26. 4. 2021

Úloha 1. Uvažujme reálná čísla $a_{i,j}$, $i = 1, \dots, n-2$, $j = 1, \dots, n$, $n \geq 3$ a determinanty A_k, $k = 1, \dots, n$

$$A_k = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2,1} & \dots & a_{n-2,k-1} & a_{n-2,k+1} & \dots & a_{n-2,n} \end{vmatrix}.$$

Dokažte, že $A_1 + A_3 + A_5 + \dots = A_2 + A_4 + A_6 + \dots$. (5 bodů)

Úloha 2. Najděte všechny komplexní polynomy splňující pro všechna $x \in \mathbb{C}$ podmínku $f(x^2) + f(x)f(x+1) = 0$. (10 bodů)

Úloha 3. Nechť T_n pro přirozené n značí počet neprázdných podmnožin $\{1, 2, \dots, n\}$ takových, že průměr jejich prvků je celočíselný. Ukažte, že $T_n - n$ je sudé. (10 bodů)

Úloha 4. Uvnitř kružnice se středem O opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC zvolíme bod P. Vzdálenosti P od vrcholů A, B, C označíme postupně a, b, c. Ukažte, že a, b, c mohou být délkami stran trojúhelníka a že jeho obsah závisí jen na vzdálenosti P od O. (15 bodů)

Vaše řešení nahrávejte do moodlu. Je možno nahrát i více souborů. Uvítáme, pokud jména souborů budou indikovat, které úlohy soubor obsahuje.

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`