

4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 3. 5. 2021.

Úloha 1. Nechť $n \geq 4$ a k je buď $2n$ nebo $2n + 1$. Nechť $A_1 A_2 \dots A_k$ je pravidelný k -úhelník. Ukažte, že

$$\frac{1}{|A_k A_1|} < \frac{1}{|A_k A_2|} + \frac{1}{|A_k A_3|} + \dots + \frac{1}{|A_k A_n|}.$$

Úloha 2. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n takových, že čísla $3^n + 2$ a $5^n + 2$ jsou složená.

Úloha 3. Najděte všechny trojice (a, b, c) kladných čísel, pro něž existuje konečná limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + b}{c} \right)^n.$$

Určete hodnotu této limity.

Úloha 4. Nalezněte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1 - 1 &= a_2 \\ a_2^2 + a_2 - 1 &= a_3 \\ &\vdots \\ a_n^2 + a_n - 1 &= a_1. \end{aligned}$$

Úloha 5. Konečná grupa G obsahuje reálné matice $n \times n$ s operací maticového násobení. Nechť je součet stop prvků G nulový. Ukažte, že součet prvků G je nulová matice.

Úloha 6. Určete

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 nx} dx.$$