3. soutěžní série – řešení

1. V permutaci se mohou objevit cykly o délkách $1, 2, \dots, n$, tedy nutně $1, \dots, n | f(n)$. Pokud $f(n)$ splňuje tyto podmínky, pak už aplikováním permutace $f(n)$ krát se ze všech cyklů stanou identity. Proto $f(n) = \mathrm{NSN}\{1, 2, \dots, n\}$. Pokud n není mocninou prvočísla, pak $n = rs$, kde r a s jsou navzájem nesoudělné a menší než n, tedy $r, s | f(n-1)$ a $f(n-1) = f(n)$. Pokud $n = p^m$, pak $p^{m-1} \leq n-1$ dělí $f(n-1)$, ale p^m ne, proto $f(n) = pf(n-1)$.

2. Součin kořenů je $\frac{b}{n} \in (0,1)$, tj. $b \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Dále diskriminant musí být kladný, tj. $a^2 > 4bn$ a kořeny $-\frac{a}{2n} \pm \frac{\sqrt{a^2-4bn}}{2n} \in (0,1)$. Odtud máme $a < 0$ a $-a + \sqrt{a^2 - 4bn} < 2n$, po úpravách $a^2 - 4bn < a^2 + 4an + 4n^2$, tj. $-a < b + n$. Protože se jedná o celá čísla, máme $(b+n-1)^2 \geq a^2 \geq 4bn + 1$, po úpravě $(n-b)^2 \geq 2(n+b)$. Pro pevné n je levá strana maximální pro $b = 1$ a pravá strana je zároveň minimální pro $b = 1$, takže je nutné ověřit $(n-1)^2 \geq 2(n+1)$, což platí pro $n \geq 5$. Pro $n = 5$, $b = 1$ vyhovuje polynom $5x^2 - 5x + 1$ s kořeny $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{20}}$.

3. Ukážeme, že celočíselná matice řádu 2 má celočíselný inverz, právě když její determinant má v absolutní hodnotě velikost 1. Platí $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Pokud je $\mathbb{A}^{-1}$ celočíselná, pak nutně $ad - bc | a, b, c, d$. Pokud prvočíslo p dělí $ad - bc$, pak dělí také a, b, c, d, tedy p^2 dělí $ad - bc$, odkud plyne $p^{2^n} | a, b, c, d$, $n \in \mathbb{N}$, spor. Tedy $|\det \mathbb{A}| = 1$. Také naopak z $|\det \mathbb{A}| = 1$ plyne, že $\mathbb{A}^{-1}$ je celočíselná. Funkce $\det(A + xB)$ je kvadratický polynom v proměnné x, o kterém ze zadání víme, že nabývá hodnot ± 1 v pěti bodech $x = 0, 1, \dots, 4$. Z Dirichletova principu alespoň třikrát nabývá stejné hodnoty, odkud už plyne, že je konstantní. Ukázali jsme, že $A + xB$ má celočíselný inverz pro všechna celá $x \in \mathbb{Z}$.

4. Nechť $\Phi(t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x$. Protože f je kladné, je Φ rostoucí. Protože f je spojitá funkce, Φ také spojitá a pro $x \in (0,1)$ platí $\Phi'(x) = f(x)$. Platí $\Phi(0) = 0$ a $\Phi(1) = 1$, tedy díky tomu, že Φ je ostře rostoucí a spojitá, je Φ rostoucí bijekce $[0,1]$ na $[0,1]$. Zároveň jednoduše vidíme, že $\Phi(a_k^n) = \frac{k}{n}$, tedy z prostoty Φ je $a_k^n = \Phi^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)$. Protože Φ je spojitá, má Riemannův integrál a tedy $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^n a_k^n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\Phi^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)$ konverguje k $\int_0^1 \Phi^{-1}(x)\mathrm{d}x$. Protože Φ je rostoucí bijekce $[0,1]$ na $[0,1]$, můžeme subtituovat $x = \Phi(t)$ a díky $\Phi'(t) = f(t)$ dostáváme $\int_0^1 \Phi^{-1}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \Phi^{-1}(\Phi(t))f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t$. Tedy b_n konverguje k $\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t$.