2. soutěžní série

22. 3. 2021

Úloha 1. Existuje nenulový polynom dvou proměnných $P(x, y)$ takový, že $P(\lfloor a \rfloor, \lfloor 2a \rfloor) = 0$ pro všechna reálná a? (Kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x, tj. největší celé číslo n takové, že $n \leq x$.)

(5 bodů)

Úloha 2. V rovině leží n žetonů. V každém kroku můžeme vzít dvojici žetonů, z nichž jeden leží v bodě A a druhý v bodě B, a oba je přenést do středu úsečky AB. Řekneme, že rozložení žetonů je *smrsknutelné*, pokud pro každou počáteční polohu žetonů existuje konečná posloupnost výše popsaných kroků taková, že na jejím konci leží všechny žetony v jednom bodě. Určete pro ktará n jsou všechna rozložení žetonů smrsknutelná.

(10 bodů)

Úloha 3. Nechť a, b, c jsou nezáporná reálná čísla splňující

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} = 1.$$

Jaké největší a nejnižší hodnoty může nabývat výraz $a + b + c$?

(10 bodů)

Úloha 4. Pro která n existuje čtvercová matice řádu n s celočíselnými prvky taková, že skalární součin každého řádku se sebou je sudý a součin libovolných dvou různých řádků je lichý?

(15 bodů)

Vaše řešení nahrávejte do moodlu. Je možno nahrát i více souborů. Uvítáme, pokud jména souborů budou indikovat, které úlohy soubor obsahuje.

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`