2. soutěžní série – řešení

1. Ano. Dosazujeme dvojice čísel $(k, 2k)$, $(k, 2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Snadno uhodneme, že polynom $P(x, y) = (2x - y)(2x + 1 - y)$ vyhovuje.

2. Odpověď zní "mocniny dvojky". Nejprve jednoduchou indukcí ukážeme, že 2^k vyhovuje pro každé k. Pro $k = 0$ máme jen jeden žeton a tedy máme vždy okamžitě hotovo. Nyní předpokládejme, že libovolné rozestavení 2^k žetonů je smrsknutelné, a mějme nějaké rozestavění 2^{k+1} žetonů. Prvních 2^k smsrkneme do jednoho bodu A a zbylých 2^k do druhého bodu B. Nakonec 2^k-krát provedeme operaci vždy na jeden žeton v A a jeden žeton v B. Tím se všechny smrsknou do bodu $\frac{A+B}{2}$.

Nyní nechť n není mocnina dvojky. Položme $n-1$ žetonů do bodu se souřadnicemi $(0, 0)$ a jeden do bodu se souřadnicemi $(1, 0)$. Ukážeme, že toto rozložení žetonů není smrsknutelné. Všimněme si, že pokud aplikujeme operaci na žetony se souřadnicemi $(x_1, 0)$ a $(x_2, 0)$, dostaneme oba žetony na souřadnice $(\frac{x_1+x_2}{2}, 0)$, z čehož vidíme, že při libovolné aplikaci operací budou žetony ležet na ose x, a že součet xových souřadnic se nezmění. To znamená, že pokud by se všechny žetony dostaly do jednoho bodu $(a, 0)$, musí (ze zachování součtu souřadnic) platit $n \cdot a = (n-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1$, čili $a = \frac{1}{n}$. Ale jednoduše se ukáže, že po aplikování operací na toto rozložení můžeme na x-ové souřadnici mít jenom buď nulu, nebo zlomek, jehož jmenovatel je mocnina dvojky - na začátku to platí a pokud aplikujeme operaci na žetony v $\left(\frac{a}{2^k}, 0\right)$ a $\left(\frac{b}{2^\ell}, 0\right)$, dostaneme oba dva žetony do bodu $\left(\frac{2^\ell a + 2^k b}{2^{k+\ell+1}}, 0\right)$, takže to platí. Ale $\frac{1}{n}$ není tohoto tvaru, což je spor.

3. Z Cauchy-Swartzovy nerovnosti (tj. nerovnosti $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2$) dostaneme

$$1 = (\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a})^2 \leq (1+1+1)((a+b) + (b+c) + (c+a)) = 6(a+b+c),$$

čili $\frac{1}{6} \leq a + b + c$. Zároveň je

$$\begin{aligned}
1 &= (\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a})^2 \\
&\geq 2(a+b+c) + 2(\sqrt{a+b}\sqrt{b+c} + \sqrt{b+c}\sqrt{c+a} + \sqrt{c+a}\sqrt{a+b}) \\
&\geq 2(a+b+c) + 2(\sqrt{b}\sqrt{b} + \sqrt{c}\sqrt{c} + \sqrt{a}\sqrt{a}) \\
&= 4(a+b+c),
\end{aligned}$$

čili $a + b + c \leq \frac{1}{4}$.

Volbou $a = b = c = \frac{1}{18}$ dostaneme $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} = 1$ a $a + b + c = \frac{1}{6}$. Naopak volbou $a = \frac{1}{4}$, $b = c = 0$ dostname $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} = 1$ a $a + b + c = \frac{1}{4}$. Takže nejvyšší dosažitelná hodnota je $\frac{1}{4}$ a nejnižší je $\frac{1}{6}$.

4. Matice existuje pro lichá n. Nechť n je sudé. Pro ověření požadované podmínky nám stačí sledovat paritu jednotlivých prvků matice, proto lze bez újmy na obecnosti uvažovat matice nad tělesem $\mathbb{Z}_2$. Hledanou matici označme A, dále označme I jednotkovou matici, J matici plnou jedniček a u vektor jedniček. Součin každého řádku se sebou je roven součinu s vektorem u, takže Au je nulový vektor a matice A musí být singulární. Dále ze zadání víme, že $AA^T = J - I$, takže $(AA^T)^2 = (J-I)^2 = J^2 - 2J + I = (n-2)J + I \overset{n \text{ sudé}}{=} I$ je regulární, spor. Pro liché n je hledanou maticí $A = J - I$, protože součin řádku se sebou je $n - 1$ a součin dvou různých řádků je $n - 2$.