1. soutěžní série – řešení

1. Označme $p(2025)$ jako a a předpokládejme, že a má n cifer. Označme $M = 20\cdot 10^{n+2} + 100a + 25$. Z definice a je $2025 \mid M$. Protože $2025 = 81 \cdot 25$, dostáváme z toho speciálně $9 \mid M$. Protože $9 \mid 20 \cdot 10^{n+2} + 25$, musí být $9 \mid 100a$, čili $9 \mid a$. Nechť $a = 9b$. Kdyby a bylo jednociferné, muselo by potom být rovno devíti, což nefunguje, protože 20925 není dělitelné 2025. Tedy a je alespoň dvouciferné. Nechť tedy $n = 2$. Platí $81 \mid M = 200025 + 900b$, tedy $81 \mid 36 + 9b$. Protože $a = 9b$ je dvouciferné, je $46 \le 36 + 9b \le 135$, takže aby $81 \mid 36 + 9b$ musí být $36 + 9b = 81$, tedy $b = 5$. Pak dostáváme $a = 45$. Protože $204525 = 101 \cdot 2025$, dostáváme, že 45 skutečně vyhovuje. Tedy odpověď je $p(2025) = 45$.

2. Ukážeme si dva způsoby, jak úlohu vyřešit.

Pomocí goniometrie: Nechť O je střed uvažované kružnice opsané. Velikost úhlů BOC, DOE a FOA si postupně označme jako $2x$, $2y$ a $2z$. Protože všechny úhly kolem O se nasčítají na 2π a úhly AOB, COD a EOF je rovnají $\frac{\pi}{3}$, je $x + y + z = \frac{\pi}{2}$. Protože trojúhelník KOB má u K pravý úhel, přeponu délky 1 a $\angle KOB = x$, je $|KO| = \cos x$. Analogicky $|LO| = \cos y$ a $|MO| = \cos z$. Platí $|\angle KOL| = |\angle KOC| + |\angle COD| + |\angle DOL| = x + y + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - z + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} - z$. Tedy $\cos|\angle KOL| = \cos(\frac{5\pi}{6} - z) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos z + \frac{1}{2}\sin z$. Pak z cosinové věty je

$$\begin{aligned}|KL|^2 &= |KO|^2 + |OL|^2 - 2|KO||OL|\cos|\angle KOL| \\ &= \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x\cos y\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos z + \frac{1}{2}\sin z\right) \\ &= \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + \sqrt{3}\cos x\cos y\cos z - \cos x\cos y\sin z - \cos^2 z.\end{aligned}$$

Protože $\cos z = \cos(\frac{\pi}{2} - x - y) = \sin(x + y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$, je $\cos^2 z = \sin x\cos y\cos z + \cos x\sin y\cos z$. Z toho celkově dostáváme, že $|KL|^2$ je rovno

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + \sqrt{3}\cos x\cos y\cos z - \sin x\cos y\cos z - \cos x\sin y\cos z - \cos x\cos y\sin z,$$

což je symetrické v x, y, z, takže $|LM|^2$ a $|MK|^2$ bude stejné, což jsme chtěli.

Pomocí komplexních čísel: Předpokládejme, že kružnice ze zadání je jednotková kružnice v komplexní rovině se středem (značeným opět O) v počátku. Nechť ω značí $e^{\frac{i\pi}{3}}$. Protože trojúhelníky ABO, CDO a EFO jsou rovnostranné, je (značíme-li jako A i komplexní číslo příslušné bodu A a tak podobně) $B = \omega A$, $D = \omega C$ a $F = \omega E$. Pak $K = \frac{B+C}{2} = \frac{\omega A + C}{2}$ a podobně $L = \frac{\omega C + E}{2}$ a $M = \frac{\omega E + A}{2}$. Pak $K - L = \frac{\omega A + (1-\omega)C - E}{2}$ a $M - L = \frac{A - \omega C + (\omega - 1)E}{2}$. Protože $0 = \omega^6 - 1 = (\omega^3 - 1)(\omega^3 + 1) = (\omega^3 - 1)(\omega + 1)(\omega^2 - \omega + 1)$ a $\omega^3 \ne 1$ ani $\omega \ne -1$, je $\omega^2 = \omega - 1$. Ale to vzhledem ke vztahům výše znamená $K - L = \omega(M - L)$, což přesně znamená, že trojúhelník KLM je rovnostranný.

3. Vlastnost „polynom nemá reálné kořeny“, resp. „polynom je kladný na $\mathbb{R}$“ je zde ekvivalentní tomu, že diskriminant polynomu je záporný. Pro diskriminanty nám vyjde

$$\Delta_T = b^2c^2 - 4a(b^3 + c^3 - 4abc) = (b^2 - 4ac)(c^2 - 4ab) = \Delta_{T_1}\Delta_{T_2}.$$

Z $\Delta_T = \Delta_{T_1}\Delta_{T_2} < 0$ plyne, že právě jeden z $\Delta_{T_1}, \Delta_{T_2}$ je záporný.

4. Pokud $\liminf na_n = 0$, zkonstruujeme posloupnost b_n následujícím způsobem. Vezměme n_1 takové, že $n_1 a_{n_1} < \frac{1}{2}$ a dále pro $k > 1$ vememe $n_k > n_{k-1}$ tak, že $n_k a_{n_k} <$

$\min\{n_{k-1}a_{n_{k-1}}, 2^{-k}\}$. Definujeme $b_n = a_{n_k}$ pro n splňující $n_{k-1} < n \leq n_k$. Pak (b_n) je nerostoucí a

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}(n_k - n_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} n_k a_{n_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Pokud naopak $\liminf na_n = c > 0$, existuje N, že pro všechna $n \geq N$ je $na_n > \frac{c}{2}$. Nechť $b_k \geq a_k$ pro nekonečně mnoho k. Z těchto indexů vyberme podposloupnost $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ splňující $n_1 > N$ a $n_k > 2n_{k-1}$ pro $k > 1$. Pak platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \geq \sum_{n=n_1}^{\infty} b_n \geq \sum_{k=2}^{\infty} b_{n_k}(n_k - n_{k-1}) > \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2} b_{n_k} n_k \geq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2} a_{n_k} n_k \geq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c}{4} = \infty.$$