

## 7. soutěžní série

20. 5. 2020

**Úloha 1.** Jaký minimální počet čtverců libovolných velikostí je třeba nakreslit na čistý papír, abychom získali čtvercovou síť  $n \times n$ ?

(10 bodů)

**Úloha 2.** Buď  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá funkce s vlastním integrálem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = L \in \mathbb{R}.$$

Ukažte, že také

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = L.$$

(10 bodů)

**Úloha 3.** Má následující soustava řešení v celých číslech?

$$x^2 + a^2 = (x + 1)^2 + b^2 = (x + 2)^2 + c^2 = (x + 3)^2 + d^2$$

(10 bodů)

**Úloha 4.** Pro která  $n > 2$  a  $m > 1$  platí následující implikace? Pokud komplexní  $m \times m$  matice  $S$  splňuje  $S^n = S$  a  $\text{tr}(S) = 0$ , pak  $S = 0$ . (Je známé, že platí pro  $n = 2$  a všechna  $m$ )

(15 bodů)