7. soutěžní série – řešení

1. Uvažujme $4n-4$ hran z $(i,0)$ do $(i,1)$, z (n,i) do $(n-1,i)$, z (i,n) do $(i,n-1)$, z $(0,i)$ do $(1,i)$ pro $1 \le i \le n-1$. Jeden čtverec může obsahovat jen dvě z nich, a proto je třeba aspoň $2n-2$ čtverců. Pro $n \ge 3$ stačí $2n-2$ čtverců: Nakreslíme čtyři čtverce s protějšími vrcholy $(0,0)$ a $(n-1,n-1)$, $(n,0)$ a $(1,n-1)$, (n,n) a $(1,1)$, $(0,n)$ a $(n-1,1)$, které pokryjí hrany ležící na přímkách $x=0,1,n-1,n$, $y=0,1,n-1,n$. Dvojice čtverců s protějšími vrcholy $(0,0)$ a (i,i), (i,i) a (n,n) pro $2 \le i \le n-2$ pokryjí hrany na přímkách $x=i$, $y=i$. Pro $n=1$ očividně potřebujeme jeden čtverec. Pro $n=2$ dva čtverce nestačí, protože na pokrytí čtyř hran dotýkajících se vrcholu (1,1) jsou třeba dva jednotkové čtverce, které ale pokryjí jen polovinu obvodu. Vyhovují tři čtverce s protějšími vrcholy $(0,0)$ a $(1,1)$, $(1,1)$ a $(2,2)$, $(0,0)$ a $(2,2)$. Pro $n=1$ potřebujeme jeden, pro $n=2$ tři, a pro $n \ge 3$ potřebujeme $2n-2$ čtverců.

2. Substituujeme $x = y - \frac{1}{y}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = (1 + \frac{1}{y^2})$. Pro $y \in (-\infty, 0)$ roste x od $-\infty$ do ∞. Vyjde nám

$$\begin{aligned} L = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} f\left(y - \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{0} f\left(y - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{0} f\left(y - \frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

přičemž poslední úprava je možná, protože první integrál na pravé straně konverguje dle Abelova kritéria ($\int_{\infty}^{0} f(y-y^{-1})(1+y^{-2})$ konverguje a integrand násobíme omezenou monotonní $(1+y^{-2})^{-1}$). V posledním integrálu substitucí $z = -\frac{1}{y}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y^2}$ dostaneme

$$\int_{-\infty}^{0} f\left(y - \frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{\infty} f\left(z - \frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z.$$

3. Pro spor předpokládejme, že taková čísla existují. Všimněme si, že platí

$$k^2 \equiv \begin{cases} 0 \pmod 8 \text{ pro } k \equiv 0 \pmod 4 \\ 1 \pmod 8 \text{ pro } k \equiv 1 \pmod 4 \\ 4 \pmod 8 \text{ pro } k \equiv 2 \pmod 4 \\ 1 \pmod 8 \text{ pro } k \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}.$$

Tedy, označíme-li jako n společnou hodnotu rovnosti ze zadání, pak se n modulo 8 rovná jednomu z čísel $0,1,4$ (protože jedno z x, $x+1$, $x+2$, $x+3$ je dělitelné 4), jednomu z čísel $1,2,5$ (protože dvě z x, $x+1$, $x+2$, $x+3$ jsou lichá) a jednomu z čísel $0,4,5$ (protože jedno z x, $x+1$, $x+2$, $x+3$ dává zbytek 2 modulo 4). Protože ale $\{0,1,4\} \cap \{1,2,5\} \cap \{0,4,5\} = \emptyset$, dostáváme spor.

4. Implikace platí právě pro taková (m,n), kde m je menší než nejmenší prvočíselný dělitel čísla $n-1$. Buď p nejmenší prvočíselý dělitel čísla $n-1$. Je-li $m \ge p$ a S_p nějaká permutační matice $p \times p$, pak matice

$$S = \begin{pmatrix} S_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má nulovou stopu, je nenulová a splňuje $S^n = S$.

Buď nyní $m < p$ a $S^n = S \ne 0$. Pak každé vlastní číslo matice S je buď nula nebo $(n-1)$-ní odmocnina z jedné. Označme $\omega = \exp\frac{2\pi i}{n-1}$ a pro $k = 0,1,\ldots,n-2$ buď c_k násobnost

ω^k jakožto vlastního čísla S. Předpokládejme, že aspoň jedno z čísel c_i je nenulové. Nechť $0 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_r \le n-2$ jsou ty indexy, pro něž je ω^{k_i} vlastním číslem (tj. $c_{k_i} \neq 0$), jistě $r \le m$. Nulovost stopy dává $h(\omega) = \sum_{i=1}^{r} c_{k_i}\omega^{k_i} = 0$. Pak ale $h(\omega^q) = 0$, kdykoli q je nesoudělné s $n-1$ (h je polynom s celočíselnými koeficienty, musí být tedy dělitelný příslušným cyklotomickým polynomem). Vezmeme-li za q čísla 1, 2, …, r ($r \le m \le p-1$), dostáváme

$$(c_{k_1}, \ldots, c_{k_r}) \begin{pmatrix} \omega^{k_1} & \omega^{2k_1} & \ldots & \omega^{rk_1} \\ \omega^{k_2} & \omega^{2k_2} & \ldots & \omega^{rk_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^{k_r} & \omega^{2k_r} & \ldots & \omega^{rk_r} \end{pmatrix} = 0.$$

Protože Vandermondova matice je regulární, dostáváme $c_{k_i} = 0$ pro všechna i, což je spor. Tj. S má pouze nulová vlastní čísla. Pak ale pro dost velké k je $S^k = 0$, což je spor s $S^n = S \neq 0$.