6. soutěžní série – řešení

1. Ne. Nechť pro spor umíme pokrýt krychli s vrcholy o souřadnicích $(x, y, z) \in \{0, 3\}^3$. Všimneme si, že součet souřadnic spojových vrcholů řetězu nemění paritu (vždy se dvě změní o 1), BÚNO je sudý. Představme si graf, jehož vrcholy jsou celočíselné souřadnice se sudým součtem na krychli a hrany jsou úhlopříčky čtverců. Každým z 54 čtverců prochází právě jedna úhlopříčka. Posloupnost spojových vrcholů řetězu bude tvořit Eulerovskou cestu tímto grafem, ale čtyři jeho vrcholy $(0, 0, 0), (0, 3, 3), (3, 0, 3), (3, 3, 0)$ mají stupeň 3. Taková cesta neexistuje.

2. BÚNO umístíme body do komplexní roviny tak, že $O = 0$, $A_k = e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n}}$, $X = x$, $x > 1$. Chceme ukázat $\prod_{k=0}^{n-1} \left| x - e^{\frac{2k\pi i}{n}} \right| + |1 - 0|^n = |x - 0|^n$. To ale okamžitě plyne z $\prod_{k=0}^{n-1} x - e^{\frac{2k\pi i}{n}} = x^n - 1$.

3. Díky tomu, že $\binom{k}{2} + k = \binom{k+1}{2}$ a $\binom{k+1}{2} - \binom{k-1}{2} = 2k - 1$, dostávámme jednoduchou indukcí, že $S_k = \{\binom{k+1}{2} - \binom{j}{2} : 1 \le j < k\} = \{\frac{(k+j)(k+1-j)}{2} : 1 \le j < k\}$. Takže $n \in \cup_{k=1}^{\infty} S_k$ právě tehdy, když existují $1 \le j < k$, že $2n = (k + j)(k + 1 - j)$. Povšimněme si, že $k + j$ a $k + 1 - j$ mají různou paritu. Protože obě jsou větší než 1, nemůže být n mocnina dvojky. Naopak, pokud n není mocnina dvojky, tak existuje liché $p > 1$ a sudé q takové, že $2n = pq$. Potom stačí zvolit $k = \frac{p+q-1}{2}$ a $j = \frac{|p-q|+1}{2}$. Tedy n může být cokoliv krom mocniny dvojky. Tedy $\mathbb{N} \setminus \cup_{k=1}^{\infty} S_k$ jsou přesně mocniny dvojky.

4. Dosadíme do řady známý vzorec pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^n + (-1)^{n-1} \phi^{-n} \right), \quad \text{kde } \phi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

a zkusíme získat teleskopující řadu. Konkrétně pro $m = 3^k$ (liché číslo) máme v čitateli

$$F_m - 2F_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\sqrt{5}\phi^m + (\phi + 2)\phi^{-m-1} \right) = -\phi^m + \phi^{-m}$$

a ve jmenovateli

$$F_m + iF_{2m} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^m + i\phi^{2m} + \phi^{-m} - i\phi^{-2m} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (1 + i\phi^m) \left(\phi^m - i\phi^{-2m} \right).$$

Protože $\phi^m - i\phi^{-2m} = i\phi^{-2m}(-i\phi^{3m} - 1)$, je podíl čitatele a jmenovatele roven

$$\frac{(-\phi^m + \phi^{-m})\sqrt{5}i\phi^{2m}}{(1 + i\phi^m)(1 + i\phi^{3m})} = \frac{\sqrt{5}(i\phi^m + 1 - 1 - i\phi^{3m})}{(1 + i\phi^m)(1 + i\phi^{3m})} = \frac{\sqrt{5}}{1 + i\phi^{3m}} - \frac{\sqrt{5}}{1 + i\phi^m}.$$

Tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_{3^k} - 2F_{1+3^k}}{F_{3^k} + iF_{2\cdot 3^k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{1 + i\phi^{3^{k+1}}} - \frac{\sqrt{5}}{1 + i\phi^{3^k}} = -\frac{\sqrt{5}}{1 + i\phi} = i + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$