6. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 13. 5. 2020.

Úloha 1. Buď $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ spojitá funkce, $f(0) = f(1) = 0$, $f(x) > 0$ pro $x \in (0,1)$. Ukažte, že existuje čtverec se dvěma vrcholy na ose a zbývajícími dvěma na grafu funkce f.

Úloha 2. Nalezněte všechny dvojice přirozených čísel p, q takové, že platí

$$(p+1)^{p-1} + (p-1)^{p+1} = q^q$$

Úloha 3. Nechť $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ jsou reálné symetrické matice řádu n a nechť $\lambda_{min}(A)$, $\lambda_{min}(B)$ jsou jejich nejmenší vlastní čísla. Dokažte

$$|\lambda_{min}(A) - \lambda_{min}(B)| \leq n \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij} - b_{ij}|.$$

Úloha 4. Kolik je uspořádaných dvojic (A, B) podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, 10\}$ takových, že každý prvek A je větší než $|B|$ a každý prvek B je větší než $|A|$? Zde $|M|$ značí počet prvků množiny M.

⋆ **Úloha 5.** Buď x reálné a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost daná předpisem $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x^n + nx_n$, $n \geq 1$. Spočtěte

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^n}{x_{n+1}}\right).$$

⋆ **Úloha 6.** Nechť G je konečná grupa pro kterou platí, že pokud $f : G \to G$ je automorfismus, pak existuje $m \in \mathbb{N}$, že $f(x) = x^m$ pro každé $x \in G$. Ukažte, že G je komutativní.

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`