5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 29. 4. 2020.

Úloha 1. Buďte I_m jednotková matice $m \times m$, B symetrická reálná $n \times n$ matice a A reálná $m \times n$ matice tak, že bloková matice

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ A^T & B \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní. Ukažte, že pak i „maticový determinant“ $B - A^T A$ je pozitivně definitní.

Úloha 2. Nechť A je konečná množina a $S \subset \{(a, b, c) : a, b, c \in A, a \neq b \neq c \neq a\}$. Předpokládejme, že pro všechna $a, b, c, d \in A$ platí

1. $(a, b, c) \in S \iff (b, c, a) \in S$
2. $(a, b, c) \in S \iff (c, b, a) \notin S$
3. $(a, b, c), (c, d, a)$ obě $\in S \iff (b, c, d), (d, a, b)$ obě $\in S$.

Ukažte, že existuje prosté zobrazení $g : A \to \mathbb{R}$, že pokud pro $a, b, c \in A$ platí $g(a) < g(b) < g(c)$, pak $(a, b, c) \in S$.

Úloha 3. Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x^3 + y^3) = (x + y)(f(x)^2 - f(x)f(y) + f(y)^2).$$

Ukažte, že $f(2020x) = 2020f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Úloha 4. Pro $n \geq 2$ mějme reálná čísla $a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_1 = a_{n+1} \geq 0$ splňující $\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} = 1$. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat výraz $\sum_{i=1}^{n} a_i$?

Úloha 5. Nechť A je konečná množina přirozených čísel. Ukažte, že existuje $B \supset A$ konečná množina přirozených čísel taková, že

$$\prod_{x \in B} x = \sum_{x \in B} x^2.$$

⋆ **Úloha 6.** Nechť $n \geq 3$. Existuje taková množina pravidelných n-úhelníků, že každá přímka v rovině obsahuje stranu právě jednoho z těchto n-úhelníků?

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`