

3. soutěžní série

25. 3. 2020

Úloha 1. Kolik nejvýše množin může mít systém podmnožin n -prvkové množiny M , pokud neexistuje prvek M , který by patřil aspoň do dvou množin tohoto systému a zároveň aspoň do dvou nepatřil. (5 bodů)

Úloha 2. Nechť A, B jsou reálné $n \times n$ matice a B má hodnotu 1. Dokažte, že $\det((A - B)(A + B)) \leq \det(A^2)$. (10 bodů)

Úloha 3. Nechť k je přirozené číslo. Posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ je daná předpisem $a_{n+1} = a_n + \lfloor \sqrt[k]{a_n} \rfloor$ spolu s $a_0 = 1$. V závislosti na k určete, pro která přirozená n existuje i takové, že $\sqrt[k]{a_i} = n$. (10 bodů)

Úloha 4. Ukažte, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \sin(x) \sin(x^2) dx$$

existuje a je vlastní. (15 bodů)