

3. domácí série - nápovědy

2. úloha: Proberte případy $b = 1, 2$ (a libovolné), $a = 1, 2$ (b libovolné). Pro $a, b \geq 3$ si položte otázku, které z těch dvou čísel bude větší a poté vyšetřujte funkci $f(x) = x^b + x + b - b^x$ na příslušném intervalu.

5. úloha: Odpověď je $n^2 + n + 1$. Na konstrukci berete vektory, které jsou skoro ve všech souřadnicích nulové. Na odhad si všimněte, že kdyby jich bylo více, pak existuje „hodně“ (co to přesně znamená, necháme na vás) vektorů, které mají tu samou souřadnici nenulovou. Pak dokažte a použijte následující lemma: Máme-li $2n + 1$ vektorů v \mathbb{R}^n , z nichž žádný není nulový, pak existují dva, jejichž skalární součin je kladný.

6. úloha: Vyhovují právě operace $a \diamond b = ab$ a $a \diamond b = \frac{a}{b}$. Vhodným dosazováním získejte nějaké vztahy mezi nimi (na většinu z nich přijdte sami, hodí se ale třeba začít tím, že funkce $a \diamond \cdot$ je prostá pro každé pevné a). Cílem bude dostat, že funkce $f(x) = 1 \diamond x$ je multiplikativní a splňuje pro $x \geq 1$ nerovnost $xf(x) \geq 1$. Poté dostanete obecný tvar operace pomocí vztahu $a \diamond b = af(b)$.