2. soutěžní série – řešení

1. Ano. Pro sudé n stačí volit $n = 2n - n$. Pro liché n uvažujme nejmenší liché prvočíslo p nedělící n. Pak $n = pn - (p-1)n$, kde pn v rozkladu obsahuje o jedno prvočíslo více než n a $(p-1)n$ obsahuje navíc pouze dvojku, protože dle volby p musí prvočíselné dělitelé $\frac{p-1}{2}$ dělit $2n|(p-1)n$.

2. Platí $ae^b = c = be^a$, tj. $ae^{-a} = be^{-b}$. Vyšetříme průběh funkce $f(x) = xe^{-x}$ na $(0, +\infty)$ a zjistíme, že je rostoucí na $(0, 1)$, klesající na $(1, +\infty)$ s nulovými limitami v nule a nekonečnu. Tedy ke každému $a \in (0, 1)$ existuje právě jedno $b > 1$, pro něž $ae^{-a} = be^{-b}$. Evidentně pro $a \to 1-$ je $b \to 1+$ a tedy $c \to e$. Pro $a \to 0+$ je $b \to +\infty$ a $c \to +\infty$. Z věty o implicitní funkci plyne, že b závisí na a diferencovatelně. Zderivujeme

$$0 = \frac{d}{da} ae^{-a} - b(a)e^{-b(a)} = e^{-a}(1-a) - e^{-b}(1-b)b',$$

odtud vyjádříme

$$b' = \frac{e^{-a}(1-a)}{e^{-b}(1-b)} = \frac{e^{-a}(1-a)}{be^{-b}(\frac{1}{b}-1)} = \frac{(1-a)}{a(\frac{1}{b}-1)} = \frac{b(1-a)}{a(1-b)},$$

dosadíme do

$$c'(a) = e^b + ae^b b' = e^b \frac{(1-b) + b(1-a)}{(1-b)} = e^b \frac{1-ab}{1-b}.$$

Stačí dokázat, že $ab < 1$, pak $c'(a) < 0$, a tedy c je klesající spojitá funkce a nabývá tedy právě všech hodnot intervalu $(e, +\infty)$.

Nerovnost $ab < 1$ plyne z $be^{-b} < \frac{1}{b}e^{-\frac{1}{b}}$, nebo-li $-b + \ln b < -\frac{1}{b} - \ln b$, tj. $2\ln b - b + \frac{1}{b} < 0$. Evidentně pro $b = 1$ nastává rovnost a zderivováním $\frac{2}{b} - 1 - \frac{1}{b^2} = -(1-\frac{1}{b})^2 < 0$ zjistíme, že pro $b > 1$ je splněna požadovaná nerovnost.

3. Volme $M = \left\{ A_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & -1 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\}$. Pak $A_x^2 = (1+x^2)I$, t.j. druhé mocniny prvků M komutují se všemi maticemi řádu 2. Pro $x \neq y$ máme $A_x A_y = \begin{pmatrix} 1+xy & y-x \\ x-y & 1+xy \end{pmatrix} = (A_y A_x)^T \neq A_y A_x$.

4. Pro sudý nenulový počet černých žetonů na začátku. Úspěšné hře přiřaďme permutaci $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, kde $\pi(i) = j$ znamená, že jsme v j-tém kroku odebrali i-tý žeton. Původně černý žeton lze odebrat, pokud před ním buď nebyl odebrán ani jeden jeho soused nebo oba jeho sousedé. Původně bílý žeton lze odebrat, pokud před ním byl odebrán jeden jeho soused. To znamená, že když budeme sledovat velikost $\pi(i)$ v cyklu $\{1, \ldots, n\}$, pak v i nastane lokální extrém právě, když i-tý žeton byl původně černý. Proto jich nutně musí být sudý nenulový počet. Na druhou stranu, nechť máme na začátku sudý počet černých žetonů. Najdeme permutaci π odpovídající úspěšné hře. Nejprve postupně černým žetonům v cyklu přiřadíme čísla $1, n, 2, n-1, \ldots$. Pak každé posloupnosti bílých žetonů jdoucí od černého žetonu s lokálním minimem k černému s lokálním maximem přiřadíme vzestupně zatím volná čísla.