

1. soutěžní série

26. 2. 2020

Úloha 1. Pro která $k \in \mathbb{R}$ existuje spojitá $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $f(f(x)) = kx^3$? (5 bodů)

Úloha 2. Nechť p je prvočíslo. Pro $1 \leq k \leq p - 1$ zadefinujeme jako a_k počet dělitelů d čísla $kp + 1$, které splňují $k \leq d \leq p$. Kolik je $a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1}$? (10 bodů)

Úloha 3. Na kraji silnice je n parkovacích míst. Každý z n řidičů má své oblíbené místo a_i . Pokud je ještě volné, zaparkuje v něm, jinak pokračuje a zastaví v příštím volném místě, a pokud jsou všechna místa za tím oblíbeným obsazená, odjede pryč. Pro kolik různých seznamů (a_1, \dots, a_n) oblíbených míst všichni zaparkují? (10 bodů)

Úloha 4. Nechť $(x_n), (y_n)$ jsou posloupnosti kladných reálných čísel takové, že $x_1 = 1, y_1 = \sqrt{3}$ a pro každé přirozené n je $x_n = x_{n+1}y_{n+1}$ a $x_{n+1}^2 + y_n = 2$. Ukažte, že tyto posloupnosti konvergují a určete jejich limity. (15 bodů)