

# 1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 4. 3. 2020.

**Úloha 1.** Určete, pro která přirozená  $n$  existuje  $n$  iracionálních čísel takových, že poměr libovolných dvou je iracionální a pro každé přirozené  $k < n$  je součin libovolných  $k$  z nich iracionální, ale součin všech  $n$  je racionální.

**Úloha 2.** Existuje v  $\mathbb{R}^2$  hustá množina tvořená body s racionálními souřadnicemi, z nichž každé dva mají iracionální vzdálenost?

**Úloha 3.** Nechť  $p$  je liché prvočíslo. Dokažte, že v tělese o  $p^2$  prvcích má rovnice  $x^2 = -1$  vždy řešení.

**Úloha 4.** Nalezněte všechna reálná čísla  $a$ , pro něž existuje funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  splňující  $f(x - f(y)) = f(x) + a[y]$  pro všechna  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Úloha 5.** Ukažte, že součin dvou antisymetrických matic  $2N \times 2N$  nemá jednoduchá vlastní čísla.

★ **Úloha 6.** V rovině leží  $4n$  bodů, přičemž žádné tři z nich neleží na jedné přímce. Tyto body určují  $\binom{4n}{3}$  trojúhelníků. Ukažte, že existuje v rovině bod  $X$ , který leží ve vnitřku alespoň  $2n^3$  z těchto trojúhelníků.