

5. soutěžní série

17. 4. 2019

Úloha 1. Je možné pokrýt rovinu pomocí vnitřků konečně mnoha parabol? (5 bodů)

Úloha 2. Je dán konečný graf. Dokažte, že lze jeho vrcholy rozdělit do dvou množin tak, aby více než polovina hran vedla mezi vrcholy z různých skupin. (10 bodů)

Úloha 3. Mějme n -ciferná čísla A_1, \dots, A_n . Jejich cifry napíšeme po řadě do řádků $n \times n$ matice B (A_i vytvoří i -tý řádek matice). Pokud jsou všechna čísla A_k dělitelná číslem d , pak i determinant matice B je dělitelný číslem d . Dokažte. (10 bodů)

Úloha 4. Označme $f(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(n-i)}$. Najděte funkci $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ v uzavřeném tvaru (bez sumy) splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$. (15 bodů)