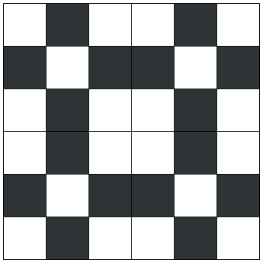
# 4. soutěžní série – řešení

**1.** Nad každou stranou mnohoúhelníku vytvoříme pravoúhlý trojúhelník, jehož strany jsou rovnoběžné se stranami čtverce a který leží vně mnohoúhelníku. Chceme dokázat, že součet čtverců odvěsen je nejvýše 4. Uvědomme si, že součet délek odvěsen, které leží nalevo od mnohoúhelníka je nejvýše jedna (jejich projekce na levou stranu čtverce jsou disjunktní) a součet druhých mocnin není větší.

**2.** Rozdělením tabulky na čtverce $3 \times 3$ vidíme, že černých políček může být v tabulce $n \times n$ (pro $n$ dělitelné třemi) nejvýše $\frac{4}{9}n^2$. Pokud každý z čtverců vyplníme podle vzoru na obrázku (pro $n = 6$), bude podmínka ze zadání splněna, protože libovolná podtabulka $m \times m$ pro $m > 1$ protíná každý z čtverců $3 \times 3$ v obdélníku obsahujícím alespoň polovinu bílých políček. Výsledkem je tedy $4 \cdot 673^2$.



**3.** Ukážeme indukcí, že

$$x_n \geq \sum_{k=1}^{n-1} kx_k.$$

Pro $n = 1$ je $x_1 = a > 0$ a dále pro $n \geq 1$ máme

$$x_{n+1} \geq (n+2)x_n - \sum_{k=1}^{n-1} kx_k \geq nx_n + 2\sum_{k=1}^{n-1} kx_k - \sum_{k=1}^{n-1} kx_k = \sum_{k=1}^{n} kx_k.$$

Nyní opět indukcí ukážeme, že $a_n \geq a(n-1)!$. Jistě pro $x_1 = a \geq a \cdot 1$ a pro $n \geq 1$ máme $x_{n+1} \geq nx_n \geq na(n-1)! = an!$. Stačí tedy vzít $n > 2019$, je-li $a \geq 1$ a $n > \frac{2019}{a}$, je-li $a < 1$.

**4.** Ano. Pro dané $\varepsilon > 0$ podle předpokladu existuje takové $\delta > 0$, že $|f(x) - f(\frac{x}{2})| < \varepsilon x$ pro všechna $x \in (0, \delta)$. Sčítáním této nerovnosti pro $\frac{x}{2^i}$, $i = 0, \ldots, n-1$ a trojúhelníkovou nerovností dostáváme

$$|f(x)| \leq \left|f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| + \sum_{i=0}^{n-1} \left|f\left(\frac{x}{2^i}\right) - f\left(\frac{x}{2^{i+1}}\right)\right| < \left|f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| + \varepsilon x \left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i}\right) < \left|f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| + 2\varepsilon x.$$

Navíc předpokládáme, že $\lim_{n\to\infty} |f(\frac{x}{2^n})| = 0$. Odtud plyne $f(x) = o(x), x \to 0$.