4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 24. 4. 2019.

Úloha 1. Najděte všechna přirozená $n \geq 3$ taková, že každý n-úhelník v rovině je celý pokrytý n kruhy sestrojenými nad průměry z jeho stran.

Úloha 2. Buď

$$S_n = \frac{n+1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$$

pro $n = 1, 2, \ldots$. Ukažte, že $\lim_{n \to \infty} S_n$ existuje a určete její hodnotu.

Úloha 3. Buď G strom na n vrcholech a $G_1, \ldots, G_k$ jeho podstromy, z nichž každé dva mají společný vrchol. Dokažte, že všechny podstromy $G_1, \ldots, G_k$ mají společný vrchol.

Úloha 4. K nule v každém kroku přičteme buď A nebo B, kde A a B jsou daná přirozená čísla. Všimneme si, že právě 35 přirozených čísel nelze získat konečným počtem kroků a 58 je jedním z těchto čísel. Najděte A a B.

Úloha 5. Nechť $\mathbb{Q}(x)$ je těleso racionálních funkcí. Je možné najít jeho podtělesa K a L taková, že stupně tělesového rozšíření $[\mathbb{Q}(x) : K]$ a $[\mathbb{Q}(x) : L]$ jsou konečné, ale $[\mathbb{Q}(x) : (K \cap L)] = \infty$? Stupeň tělesového rozšíření $[A : B]$ je dimenze tělesa A chápaného jako vektorový prostor nad tělesem B.

Úloha 6. Najděte nutnou a postačující podmínku, kterou musí splňovat posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ čísel $a_n \in (0, 1)$, aby pro každě $x \in (0, 1)$ existovala permutace π_x přirozených čísel, pro kterou

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{\pi_x(n)}}{2^n}.$$

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`