2. soutěžní série – řešení

1. Chceme ukázat, že $3 \not\equiv 2^n \pmod{65}$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$. Mocniny dvojky jsou postupně $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \equiv -1$. Není mezi nimi ani 3, ani $-3 \equiv 61$, takže kongruence nemá řešení.

2. Označme $p_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x$. Platí $p_n(0) = 0$ a navíc jsou polynomy p_n rostoucí na $\mathbb{R}^+$, takže existuje právě jedno kladné řešení r_n pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dále je $p_n(x)$ pro každé pevné $x > 0$ rostoucí vzhledem k n, tedy kořeny r_n tvoří klesající posloupnost. Rovnice $\frac{x}{1-x} = \sum_{i=1}^{\infty} x^i = 1$ má řešení $\frac{1}{2}$ a $p_n(x) < \frac{x}{1-x}$ na $(0,1)$, takže $r_n > \frac{1}{2}$. Pokud by limita řešení $r = \lim_{n\to\infty} r_n$ byla větší než $\frac{1}{2}$, pak $\frac{r}{1-r} > 1$ a pro dostatečně velké n by platilo $\frac{r}{1-r} > p_n(r) > 1 = p_n(r_n)$, spor.

3. Protože $a > 1$, máme $[a(n+1)] - [an] \geq 1$, tj. posloupnost (a_n) je rostoucí a neobsahuje žádné číslo dvakrát. Podobně posloupnost (b_n). Kdyby nějaké číslo bylo v obou posloupnostech, pak máme $k < an < k+1$ a $k < bm < k+1$ pro vhodná přirozená m, n, k (levé nerovnosti jsou ostré kvůli iracionalitě a, b). První dvojnerovnost vydělíme a, druhou b a sečteme na $k < n + m < k + 1$, což je spor.

Předpokládejme nyní, že k není obsaženo v posloupnosti (a_n), tj. pro vhodné n platí $an < k$ a $k + 1 < a(n+1)$. Pak ale $n < \frac{k}{a} = k - \frac{k}{b}$, tj. $b(k-n) > k$, a na druhou stranu $n + 1 > \frac{k}{a} + \frac{1}{a} = k + 1 - \frac{k+1}{b}$, tj. $k + 1 > b(k-n)$, tedy $k = [b(k-n)] = b_{k-n}$.

4. a) Předpokládejme, že l_a je prosté. Protože je A konečný, existují $k < l \in \mathbb{N}$ taková, že $a^l = a^k$. Z prostoty levého násobení pak plyne $a^{l-k+1} = a = ae$ a ještě jedním použitím prostoty máme $a^{l-k} = e$. Mějme nyní $x, y \in A$ splňující $xa = ya$. Vynásobíme rovnost zprava prvkem a^{l-k-1} (exponent je nezáporné celé číslo), z asociativity násobení dostáváme $xe = ye \to x = y$. Tedy i zobrazení r_a je prosté. Analogicky bychom dokázali opačnou implikaci.

b) Uvažme množinu matic

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : u, v \in R \right\},$$

kde R je libovolný okruh s jednotkou – například $\mathbb{Z}_2$. Sčítání a násobení definujeme jako u klasických matic nad tělesem. Snadno se přesvědčíme, že prvek $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$ splňuje $l_b(x) = bx = x$ pro každé $x \in A$ (b je „levá jednotka“), tedy l_b je prosté. Na druhou stranu pro $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ máme $r_b(x) = xb = 0$, tedy zobrazení d_b prosté není.

Pozn.: Mimo jiné jsme dokázali, že tento okruh nemá jednotku.