1. soutěžní série – řešení

1. Označme vrcholy čtyřstěnu A, B, C a D. Ze zadání plyne

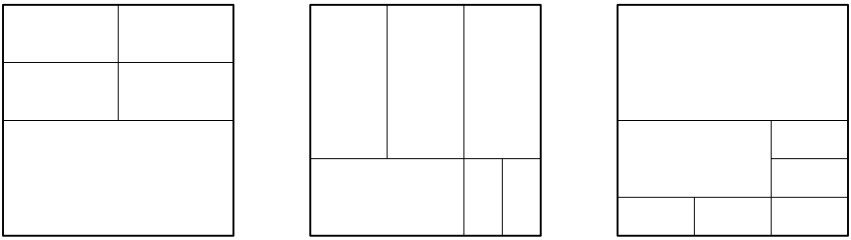
$$|AB| + |AC| + |AD| = |BA| + |BC| + |BD|$$

a

$$|CA| + |CB| + |CD| = |DA| + |DB| + |DC| .$$

Součtem těchto rovností dostáváme $|AC| = |BD|$. Analogicky dokážeme, že každé dvě hrany, které nemají společný vrchol, jsou stejně dlouhé. Z toho plyne, že délky hran AB, AC a AD tvoří stejnou trojici čísel jako délky hran CD, DB a BC, které tvoří trojúhelník BCD. To samé platí i pro trojice hran vycházející ze zbylých tří vrcholů.

2. Pokud má obdélník strany v poměru $2:1$, nazveme jej *vhodný*. Všimněme si, že máme-li čtverec pokrytý pomocí n vhodných obdélníků, je možné jej pokrýt i pomocí $n+3$ vhodných obdélníků, a to například tak, že jeden z původních vhodných obdélníků rozdělíme na čtyři shodné dvakrát zmenšené vhodné obdélníky. Na obrázku níže vidíme rozdělení čtverce na 5, 6 a 7 vhodných obdélníků, čímž jsme dokázali, že tvrzení úlohy vyhovuje každé $n \geq 5$.



3. Nechť $m = n^2+r$, $1 \leq r \leq n$. Pak $a_1 = n^2+n+r < n^2+2n+1$ a stále platí $\lfloor a_1 \rfloor = n$. Dále $a_2 = n^2+2n+r = (n+1)^2+(r-1)$, což je druhou mocninou pro $r = 1$. Odtud indukcí plyne, že a_{2r} je čtvercem. Pokud původní číslo bylo $m = n^2+r$, $n+1 \leq r \leq 2n$, začínáme s číslem odpovídajícím a_1 v minulém případu. Proto vyjde, že $a_{2(r-n)-1}$ je čtvercem.

4. Všimněme si, že $3a_nb_n(a_n+b_n) = (a_n+b_n)^3 - a_n^3 - b_n^3$. Nechť $c_n^1, \ldots, c_n^{n+1}$ jsou délky podintervalů $(0,1)$ rozděleného body $x_1, \ldots, x_n$ a nechť $d_n = \sum_{i=1}^{n+1} (c_n^i)^3$. Lze nahlédnout a ověřit indukcí, že $3\sum_{n=1}^{N} a_nb_n(a_n+b_n) = 1 - d_N$. Zbývá ukázat, že $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$. Zvolme $\varepsilon \in (0,1)$ libovolné, pak pro dostatečně velké N jsou díky hustotě bodů x_n v $(0,1)$ všechny podintervaly kratší než ε. Pak ale pro $n \geq N$ platí $d_n = \sum_{i=1}^{n+1}(c_n^i)^3 \leq \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n+1} c_n^i = \varepsilon^2$.