6. soutěžní série – řešení

1. Z $0 = (a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = ab + ba$ plyne $ab = -(ba)$, takže

$$abc = a(bc) = -((bc)a) = -(b(ca)) = (ca)b = c(ab) = -((ab)c) = -abc.$$

2. Je-li trojúhelník pravoúhlý, pak $\gamma = 60°$, $\alpha = 90°$ a snadno se dopočte, že $\frac{R}{r} = \sqrt{3} + 1$. Opačnou implikaci dokážeme z identity $r = 4R \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$. Pak

$$\frac{1}{2(\sqrt{3}+1)} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \left(\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}.$$

Protože $\alpha - \gamma = 30°$, $\cos 15° = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos 30° + 1)}$ a $\cos\frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos\left(90° - \frac{\beta}{2}\right) = \sin\frac{\beta}{2}$, stačí vyřešit kvadratickou rovnici a dostaneme $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ nebo $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. $\beta = 30°$ nebo $\beta = 90°$, ale druhé řešení je ve sporu s $\alpha \geq \beta$.

3. Součet $\frac{7}{4}$ získáme nalezením několika teleskopických řad. Pro pevné i se součty $\frac{1}{i^2j+2ij+ij^2} = \frac{1}{i(i+2)}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+i+2}\right)$ přes j navzájem vyruší až na prvních $i+2$ členů a zbytek je $\frac{1}{i(i+2)(j+i+2)} \to 0$. Využitím $\frac{1}{i(i+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+2}\right)$ (a vynásobením dvěma) se řada převede na

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \\
&\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) + \cdots .
\end{aligned}$$

Každý člen s minusem se odečte od členu o řádek níže, takže dostáváme

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) + \cdots \\
=&1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{1}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{4} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{1}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{5} + \cdots\right) \\
=&\frac{7}{4} + \left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \cdots\right) \\
=&\frac{7}{4} + 1 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

4. Vybíráme-li podmatici, vybíráme k sloupců a k řádků. Dvě podmatice se budou protínat, právě když mají společný aspoň jeden řádek a zároveň aspoň jeden sloupec. Označíme-li tedy $F(n,k)$ maximální počet k-prvkových podmnožin n prvkové množiny, aby libovolné dvě měly neprázdný průnik, pak maximální počet matic je $F(n,k)^2$. Erdösova–Koova–Radoova věta říká, že $F(n,k) = \binom{n-1}{k-1}$.