4. soutěžní série

16. 4. 2018

Úloha 1. V rovině je dáno n bodů tak, že žádné tři neleží na jedné přímce. Je možné očíslovat je tak, aby $P_1P_2 \dots P_n$ byl jednoduchý n-úhelník (bez křížení stran)? (5 bodů)

Úloha 2. Pro přirozená čísla $1 \leq k < n$ uvažujme všechny rozklady n na součty několika (tj. aspoň dvou) přirozených čísel, přičemž nám záleží na pořadí čísel. Ukažte, že se číslo k objeví v těchto rozkladech $(n-k+3)2^{n-k-2}$-krát. (10 bodů)

Úloha 3. Čísla

$$\lambda_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^n}$$

jsou iracionální pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Dokažte. (10 bodů)

Úloha 4. Buď $G \subset \mathbb{R}^3$ a nechť $* : G \times G \to G$ je binární operace na G taková, že $(G, *)$ je grupa. Nechť $a * b = a \times b$ pro libovolnou dvojici a, $b \in G$, splňující $a \times b \neq 0$. Dokažte, že $a \times b = 0$ pro každé a, $b \in G$. ($a \times b$ značí obvyklý vektorový součin vektrorů a, b) (15 bodů)