

2. soutěžní série

12. 3. 2018

Úloha 1. Spočítejte

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}.$$

(10 bodů)

Úloha 2. Uvažujme 10×10 matici A takovou, že součet členů v každém řádku je $\frac{1}{2}$. Určete součet všech členů matice A^5 . (10 bodů)

Úloha 3. Kolika způsoby je možné napsat $n \in \mathbb{N}$ jako součet několika mocnin dvojky, pokud nám nezáleží na pořadí a každou mocninu lze použít nejvýše třikrát? Např. pro $n = 7$ je $7 = 4 + 2 + 1 = 4 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 2 + 1 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1$. (10 bodů)

Úloha 4. Pokud má rovnice $ax^2 + by^2 = 1$, $a, b \in \mathbb{Q}$ racionální řešení $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$, pak má nekonečně mnoho racionálních řešení. Dokažte. (10 bodů)