1. soutěžní série – řešení

1. Matice $X^2 - 4X = (X-2I)^2 - 4I$ má vlastní čísla $-3, -4$, takže matice $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ má vlastní čísla buď $3, 2$ nebo $1, 2$ a navíc $a + d = 4 \pm 1$. Pro prvek na pozici $(2,1)$ pak plyne $(4 \pm 1)c - 4c = 0$, neboli $c = 0$. Odtud plyne $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $d = 2$. Pro prvek na pozici $(1,2)$ obdobně plyne $\pm b = 2018$. Vyhovující matice jsou $X_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2018 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2018 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Uvažujme trojúhelník se stranami délek $a \geq b \geq c$ a úhlem α proti a velikosti alespoň $\frac{2\pi}{3}$. Pak z kosinové věty plyne $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \geq b^2 + c^2 + bc \geq 3c^2$. Proto stačí najít nějaký vnitřní úhel velikosti alespoň $\frac{2\pi}{3}$.

Pokud 6 daných bodů tvoří konvexní šestiúhelník, pak součet vnitřních úhlů je $6\frac{2\pi}{3}$ a nějaký z nich bude dostatečně velký. Jinak lze konvexní obal daných bodů rozdělit úhlopříčkami na trojúhelníky a v některém (nebo alespoň na hraně) trojúhelníku ABC leží bod D. Pak součet úhlů ADB, BDC a CDA bude $3\frac{2\pi}{3}$.

3. Označme $g(y) = (\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x)^2 - \int_0^y f^3(x)\,\mathrm{d}x$. Pak $g(0) = 0$ a chceme $g(1) \geq 0$. Stačí, aby platilo $g'(y) = 2f(y)(\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x) - f^3(y) \geq 0$. Protože $f > 0$ na $(0,1]$, stačí $2(\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x) - f^2(y) \geq 0$. Tato funkce je nulová v $y = 0$, tak ji opět zderivujeme a chceme $2f(y) - 2f(y)f'(y) = 2f(y)(1 - f'(y)) \geq 0$, což plyne z předpokladu $f' \in (0,1]$. Jelikož $f > 0$ na $(0,1]$, rovnost nastane jen pro $f' = 1$, tj. $f(x) = x$.

4. Využijeme důsledek binomické věty: Funkce $(x-1)^{n+1}$ má v bodě $x = 1$ prvních n derivací nulových, proto pro $k = 0, \ldots, n$ platí

$$0 = \left((x-1)^{n+1}\right)^{(k)}\Big|_{x=1} = \left(\sum_{i=0}^{n+1} x^i (-1)^{n+1-i} \binom{n+1}{i}\right)^{(k)}\Bigg|_{x=1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \prod_{j=0}^{k-1} (i-j) x^{i-k} (-1)^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i}\Bigg|_{x=1} = \sum_{i=0}^{n+1} p_k(i)(-1)^i \binom{n+1}{i},$$

kde p_k jsou nějaké polynomy stupňů k. Díky lineární kombinaci také pro daný polynom P platí $\sum_{i=0}^{n+1} P(i)(-1)^i \binom{n+1}{i} = 0$. Využitím této identity dostáváme

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} = 2^{n+1} \leq (a-1)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n+1-i} \binom{n+1}{i} \left(a^i - P(i)\right),$$

takže pro nějaké i je $|a^i - P(i)| \geq 1$.