5. soutěžní série

15. 5. 2017

Úloha 1. Do každého políčka tabulky $n^2 \times n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) napíšeme přirozené číslo tak, že hodnoty v políčkách sousedících hranou se neliší v absolutní hodnotě o více než n. Dokažte, že alespoň $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ políček obsahuje totéž číslo. (5 bodů)

Úloha 2. Buď A reálná $n \times n$ matice a $v_1, \ldots, v_{n+1}$ její vlastní vektory, z nichž libovolných n je lineárně nezávislých. Musí být A skalární násobek identity? (10 bodů)

Úloha 3. Určete množinu všech funkcí $f \in C^1(\mathbb{R})$, pro které existuje neprázdný interval (a, b) a kladná funkce $g \in C^1((a, b))$, pro niž na (a, b) platí $(fg)' = f'g'$. (10 bodů)

Úloha 4. Řekneme, že aritmetická posloupnost $a_1, \ldots, a_n$ délky n je *maximální* v množině $S = \{1/r; r \in \mathbb{N}\}$, pokud $a_1, \ldots, a_n \in S$, ale a_0, $a_{n+1} \notin S$. Například čísla 1/20, 1/8, 1/5 tvoří maximální aritmetickou posloupnost délky 3 s diferencí 3/40. Ukažte, že v S existuje maximální aritmetická posloupnost libovolné přirozené délky.

(10 bodů)