5. soutěžní série – řešení

1. BÚNO nechť je nejmenší číslo v tabulce 1 a největší označme M. Snadno nahlédneme, že pokud mezi dvěma políčky v tabulce umíme vyrobit „cestu“ z políček sousedících hranou, při které překročíme h hran, pak rozdíl čísel v těchto dvou políčkách je nanejvýš hn. Ovšem každá dvě políčka můžeme spojit cestou překračující nanejvýš $2n^2 - 2$ hran (nejdelší cesta je mezi protějšími rohy), je tedy $M - 1 \leq (2n^2 - 2)n$. V tabulce o n^4 polích tedy je nanejvýš $2n^3 - 2n + 1$ různých hodnot, nějaká hodnota se tedy musí vyskytovat alespoň v počtu

$$\frac{n^4}{2n^3 - 2n + 1} > \frac{n}{2},$$

tedy se musí vyskytovat alespoň $(\lfloor n/2 \rfloor + 1)$-krát.

2. Předně si uvědomme, že A musí mít diagonální Jordanův tvar – kdyby tomu tak nebylo, neexistovala by báze z vlastních vektorů (což předpokládáme). Algebraické a geometrické násobnosti všech vlastních čísel jsou tedy stejné, dále proto budeme mluvit jen o násobnosti.

Jistě nějakému vlastnímu číslu λ matice A přísluší více vektorů z $v_1, \ldots, v_{n+1}$, než je jeho násobnost k (Dirichletův princip). Kdyby kromě λ měla A ještě nějaké jiné vlastní číslo, mělo by λ násobnost ostře menší než n, a tedy bychom mohli z $v_1, \ldots, v_{n+1}$ vybrat více jak k, ale ne více než n vektorů příslušných λ; tyto by byly lineárně závislé, spor se zadáním.

Jordanův tvar A je tedy λE, a tedy i $A = \lambda E$.

3. Pro $f \equiv 0$ je rovnost splněna pro libovolnou g. Dále nechť f není identicky rovna nule. Nechť takový interval (a, b) a kladná funkce g existují, pak na (a, b) platí $fg' + f'g = f'g'$, tj.

$$g'(f - f') = -f'g. \tag{1}$$

Pokud $f = f'$ na $\mathbb{R}$, pak $f(x) = ce^x$ a $c \neq 0$ (f nenulová). Pak ale $f' \neq 0$ na $\mathbb{R}$ a aby byla splněna rovnice (1), musí být $g \equiv 0$, spor. Tedy, f nesmí být exponenciála ce^x, $c \neq 0$.

Pokud naopak f není exponenciála ce^x, $c \in \mathbb{R}$, pak najdeme $x_0 \in \mathbb{R}$, kde je $f - f' \neq 0$ a ze spojitosti nerovnost platí i na okolí. Na tomto okolí můžeme rovnici (1) vydělit $f - f'$ a z teorie diferenciálních rovnic máme existenci řešení g na malém okolí x_0 pro počáteční podmínku $g(x_0) = 1$. Toto řešení je na nějakém okolí x_0 kladné a to je hledaný interval a hledaná g, jak se snadno ukáže upravením rovnice do tvaru $(fg)' = f'g'$.

4. Je známo, že pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ existuje dokonce nekonečně mnoho prvočísel ve tvaru $1+nd$. Zvolme jedno pevné d a prvočíslo $p = 1+nd$. Pak čísla $a_i = \frac{1+(i-1)d}{(p-1)!}$, $i = 1, \ldots, n$ tvoří aritmetickou posloupnost délky n s diferencí $d/(p-1)!$. Členy této posloupnosti jsou prvky S, protože čísla $1, 1+d, \ldots, 1+(n-1)d$ jsou menší nebo rovná $p - 1$, neboli a_i jsou v požadovaném tvaru $1/r_i$ pro nějaká přirozená r_i. Tato posloupnost je také maximální, neboť člen $a_0 = (1-d)/(p-1)!$ není kladný a člen $a_{n+1} = p/(p-1)!$ už je v základním tvaru.