5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 24. 4. 2017.

Úloha 1. Je možné pokrýt tabulku 2017×2017 pomocí obdélníků 1×2 a pětipolíčkových křížů tvořených jedním prostředním políčkem a jeho čtyřmi sousedy?

Úloha 2. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{1+n+n^2}.$$

Úloha 3. (seriál) Nechť $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ je reálná $n \times n$ matice taková, že $A^n \neq 0$ a $a_{ij}a_{ji} \leq 0$ pro všechna $1 \leq i, j \leq n$. Dokažte, že A má alespoň dvě vlastní čísla, která nejsou reálná.

Úloha 4. Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou vrcholy pravidelného n-úhelníku, l je kružnice opsaná tomuto n-úhelníku a k je taková kružnice, že l leží v jejím vnitřku. Označme X_i, Y_i průsečíky tečny ke kružnici l vedené bodem A_i a kružnice k. Ukažte, že množinu úseček $\{A_iX_i, A_iY_i : \ i = 1, \ldots, n\}$ lze rozdělit na dvě části tak, že součet délek úseček v každé části bude stejný.

$\star$ **Úloha 5.** Nechť R je okruh nulové charakteristiky a nechť e, f, g jsou idempotentní prvky splňující $e + f + g = 0$. Ukažte, že $e = f = g = 0$.

$\star$ **Úloha 6.** Buď n přirozené číslo. Najděte nejmenší číslo $f(n)$ s následující vlastností: Je-li A $n \times n$ matice nezáporných celých čísel, jejíž každý sloupec a každý řádek má součet $f(n)$, pak matice obsahuje n prvků větších než 1, z nichž žádné dva neleží ve stejném sloupci ani ve stejném řádku.