4. soutěžní série

3. 4. 2017

Úloha 1. Dokažte, že každých $4n$ bodů v $\mathbb{R}^3$ takových, že žádné čtyři neleží ve společné rovině, lze rozdělit do n čtveřic, jejichž konvexní obaly jsou po dvou disjunktní. (10 bodů)

Úloha 2. Kolik posloupností délky 2017 lze vytvořit pomocí písmen A, B, C tak, aby se každé použilo lišekrát? (10 bodů)

Úloha 3. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení: Pokud $g : (0,1) \to (0,1)$ splňuje $g(x) > x$ pro všechna $x \in (0,1)$, pak existuje spojitá funkce $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ splňující $f(g(x)) > f(x)$ pro všechna $x \in (0,1)$, ale přitom f není rostoucí. (10 bodů)

Úloha 4. Nechť kladná reálná čísla $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ ($n \geq 2$) splňují

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Dokažte, že pak

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n}{y_n}.$$

(10 bodů)

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`