4. soutěžní série – řešení

1. Body $a_i = (x_i, y_i, z_i)$ seřadíme tak, aby $x_i \leq x_{i+1}$, $i = 1, \ldots, 4n-1$. Jako čtveřice stačí volit body $a_{4k-3}, \ldots, a_{4k}$, $k = 1, \ldots, n$. Pokud by dvě čtveřice měly neprázdný průnik, musel by být na jejich společné souřadnici $x = x'$, ale protože tři body neleží na stejné přímce, pak úsečka spojující dva nebude procházet tím třetím.

2. Posloupností délky n je celkově 3^n, z nich vyhovuje (každé písmeno se vyskytuje lišekrát) $f(n)$ a nevyhovující posloupnost pro liché n obsahuje právě dvě písmena suděkrát. Vyhovující posnoupnost délky $n+2$ vznikla buď přidáním dvojice stejných písmen k vyhovující posloupnosti délky n, nebo přidáním dvojice čísel, které se v nevyhovující posloupnosti délky n vyskytovaly suděkrát. Proto platí rekurentní vzorec

$$f(n+2) = 3f(n) + 2(3^n - f(n)) = f(n) + 2 \cdot 3^n.$$

Dále platí $f(3) = 6$ a odtud plyne

$$f(2017) = 6 + 2\sum_{n=1}^{1007} 3^{2n+1} = 6(1 + 9 + \cdots + 9^{1007}) = \frac{3}{4}(3^{2016} - 1).$$

3. The statement is not true. Let g be a function satisfying $g((a,b)) = (a,1)$ for all pairs $0 < a < b < 1$. For example, we can take $g(x) := x + d(x)(1-x)$, where $d(x)$ is the density of zeros in the binary expansion of x if the density exists and is strictly between 0 and 1 and $d(x) = \frac{1}{2}$ otherwise. Let $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ be a continuous function satisfying $f(x) < f(g(x))$ for all $x \in (0,1)$. Choose any pair x, $y \in (0,1)$, $x < y$. Then the set $M_y := \{z \in (0,1) : \ g(z) = y\}$ is dense in $(0,y)$ and it holds that $f(z) < f(y)$ for any $z \in M_y$. Choose any $z \in M_y$ such that $x < z < y$ (then $f(z) < f(y)$) and define $M_z := \{w \in (0,1) : \ g(w) = z\}$. Then M_z is dense in $(0,z)$ and $f(w) < f(z)$ for all $w \in M_z$. By density and continuity of f we have $f(x) \leq f(z) < f(y)$. Since $x < y$ were arbitrary, f is increasing.

4. Platí

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2 \overset{(\heartsuit)}{\leq} \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{y_k}\Big) \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{y_k}\Big),$$

kde $(\heartsuit)$ je Cauchy-Schwarzova nerovnost. Výsledek dostaneme vydělením $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.