3. soutěžní série – řešení

1. Čísla $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ a $\frac{1-\sqrt{21}}{2}$ jsou kořeny polynomu $x^2 - x - 5$. Explicitní vzorec pro f_n nám proto dává čísla určená rekurentním vzorcem $f_{n+2} = f_{n+1} + 5f_n$. Celá posloupnost je určena dvěma členy $f_0 = 2$ a $f_1 = 1$. Konečně z $f_2 \equiv 2$ a $f_3 \equiv 1 \pmod 3$ plyne, že tato posloupnost má periodu 2 modulo 3 a žádné její členy nejsou násobky tří.

2. Označme tři nejtěžší závaží od nejtěžšího A, B, C. Postupně budeme porovnávat jednotlivá závaží, vyřadíme ta lehčí a provedeme turnaj způsobem „pavouk“. Pomocí 2016 porovnání najdeme A a navíc díky $2016 < 2048 = 2^{11}$ víme, že turnaj skončil po 11-ti kolech, tj. žádné závaží se neporovnávalo více než 11krát. B muselo být mezi nejvýše 11-ti závažími vyřazenými závažím A. Porovnáme závaží vyřazená A v prvním a druhém kole, těžší z nich porovnáme s tím vyřazeným ve třetím kole a po nejvýše 10-ti porovnáních najdeme B. Všechna závaží vyřazená závažím A (kromě B) byla poražena i závažím B (alespoň nepřímo pomocí tranzitivity), tedy C bylo někdy přímo vyřazeno závažím B. Pokud B bylo původně vyřazeno závažím A v i-tém kole, pak B v původním turnaji porazilo nejvýše $i-1$ závaží a při hledání B porazilo nejvýše $12 - i$ závaží (resp. 10 pro $i = 1$). Tedy C najdeme na nejvýše 10 porovnávání mezi nejvýše 11-ti závažími poraženými B. To je celkově nejvýše $2016 + 10 + 10 = 2036$ porovnání na nalezení A, B, C a jejich pořadí.

3. Budeme postupovat indukcí na stupeň polynomu p. Pro konstantní nezáporný polynom c je $p_1 = \sqrt{c}$. Nechť p je nekonstantní polynom a nechť umíme najít rozklad polynomů nižšího stupně. Jelikož p je spojitá funkce na $\mathbb{R}$ a $\lim_{|x|\to\infty} p(x) = \infty$, nabývá svého minima v nějakém bodě $p(x_0) = m \geq 0$. Polynom $p(x) - m$ má kořen x_0, který díky nezápornosti $p-m$ bude sudého stupňe, takže $p(x) = m+(x-x_0)^2 q(x)$. Polynom q má podle indukčního předpokladu rozklad $\sum_{i=1}^{k}(q_i(x))^2$ a tedy hledaný rozklad p je $p_i = (x - x_0)q_i$ pro $i = 1, \dots, k$ a $p_{k+1} = \sqrt{m}$.

4. Arzelàova—Ascoliova věta nám říká, jak vypadají (relativně) kompaktní podmnožiny prostoru spojitých funkcí — stačí ukázat, že funkce f_n jsou stejně omezené a stejně spojité. Odhadněme pro libovolná $x, y \in [0,1]$

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \left|\int_x^y f_n'(t)dt\right| \leq \left|\int_x^y \frac{1}{\sqrt{t}}dt\right| = 2|\sqrt{y} - \sqrt{x}|.$$

Ze spojitosti funkce $2\sqrt{x}$ ihned plyne stejná spojitost funkcí f_n, tj.

$$\forall x \in [0,1]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall y \in [0,1]:\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Dokážeme stejnou omezenost. Protože $\int_0^1 f_n(x) = 0$, musí existovat x_n takové, že $f_n(x_n) = 0$. Ale pro všechna $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| = |f_n(x) - f_n(x_n)| \leq 2|\sqrt{x} - \sqrt{x_n}| \leq 2$, takže všechny funkce f_n leží v kouli o poloměru 2.