3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 27. 3. 2017.

Úloha 1. (seriál) Nechť $\mathrm{M}_k(\mathbb{C})$ značí množinu všech komplexních $k \times k$ matic. Rozhodněte, zda existuje nějaký okruhový homomorfismus z $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ do $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$, tj. zobrazení $\varphi\colon \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ platí $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$, $f(-x) = -f(x)$, $f(0) = 0$ a $f(E) = E$.

Úloha 2. Buď d reálné číslo. Pro každé přirozené m definujme rekurentně posloupnost $a_m = (a_m(j))_{j=1}^{\infty}$ předpisem

$$a_m(0) = \frac{d}{2^m}, \qquad a_m(j+1) = (a_m(j))^2 + 2a_m(j)$$

pro $j = 0, 1, 2, \ldots$. Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} a_n(n)$.

Úloha 3. Mějme n přímek v rovině, přičemž žádné tři se neprotínají v jednom bodě a žádné dvě nejsou rovnoběžné. Tyto přímky dělí rovinu na několik oblastí. Kolik nejméně z těchto oblastí je ohraničeno právě dvěma přímkami?

Úloha 4. Nalezněte počet permutací π na množině $\{1, 2, \ldots, n\}$ splňujících $1 \cdot \pi(1) \leq 2 \cdot \pi(2) \leq \cdots \leq n \cdot \pi(n)$.

Úloha 5. Každé číslo od 1 do 1 000 000 je obarveno černě nebo bíle. Tah spočívá v přebarvení zvoleného čísla a všech čísel s ním soudělných na opačnou barvu. Můžeme konečným počtem tahů získat samá bílá čísla, byla-li na počátku všechna černá?

$\star$ **Úloha 6.** Ukažte, že každý nekonečnědimenzionální normovaný vektorový prostor má uzavřený podprostor nekonečné dimenze a nekonečné kodimenze.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`