2. soutěžní série

6. 3. 2017

Úloha 1. Najděte všechny spojité funkce $f\colon [1,2] \to [1,2]$ splňující $f(1) = 2$ a

$$f(x) = \frac{2}{f(f(x))}$$

pro všechna $x \in [1,2]$. (5 bodů)

Úloha 2. Dva hráči hrají n-domino: na začátku máme kompletní sadu, tj. pro každou dvojici přirozených čísel i, j, kde $1 \le i \le j \le n$, existuje právě jedno domino ve tvaru obdélníku sestávajícího ze dvou čtverců, na jednom je napsáno i a na druhém j. První hráč vybere libovolné domino a položí (nějak otočené) na stůl. Pak se hráči střídají v tazích. Hráč na tahu vybere jedno z dosud nepoužitých domin a přiloží ho k obdélníku $1 \times 2k$ na stole tak, aby vytvořil obdélník $1 \times (2k+2)$ a aby sousední domina měla stejná čísla na přiléhajících čtvercích. Kdo nemůže hrát, prohrál. Kdo má vyhrávající strategii? (10 bodů)

Úloha 3. Nechť $\mathrm{M}_k(\mathbb{C})$ značí množinu všech komplexních $k \times k$ matic. Rozhodněte, zda existuje nějaký okruhový homomorfismus z $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ do $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$, tj. zobrazení $\varphi\colon \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ platí $f(x+y) = f(x)+f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$, $f(-x) = -f(x)$, $f(0) = 0$ a $f(E) = E$. (10 bodů)

Úloha 4. Pro která $n > 1$ existuje obdélník, který lze rozdělit na n obdélníků, jež jsou všechny podobné původnímu obdélníku, ale každý je jinak velký? (15 bodů)

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`