2. soutěžní série – řešení

1. Funkce $f(x) = \frac{2}{x}$ vyhovuje. Ukážeme, že jiné řešení neexistuje. Dosazením $f(1) = 2$ do dané rovnice získáme $f(2) = f(f(1)) = \frac{2}{f(1)} = 1$. Ze spojitosti f a věty o nabývání mezihodnot plyne, že funkce f zobrazuje interval $[1, 2]$ na celý interval $[1, 2]$. Substitucí $y = f(x) \in [1, 2]$ dostáváme nutnou podmínku $f(y) = \frac{2}{y}$, a proto je $f(x) = \frac{2}{x}$ jediným možným řešením.

2. První hráč má vyhrávající strategii. V prvním tahu zahraje $(1, 1)$, druhý hráč $(1, a)$ a první poté (a, a). Nyní je první v *dobré situaci*, tj. na obou koncích je 1 nebo a a mezi zbývajícími dominy je $(1, k)$, právě když je tam (a, k). Na tah druhého $(k, 1)$, může první odpovědět (a, k) a na tah (a, k), může odpovědět $(k, 1)$ tak, aby se dostal opět do dobré situace.

3. Označme symbolem $E_i \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ matici s jedničkou na pozici (i, i) a nulami jinde. Nechť se matice z $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ s nulami na diagonále a jedničkami mimo diagonálu zobrazí na matici $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$. Potom $M^2 = E$, tedy M je regulární a navíc platí $Mf(E_1) = f(E_2)$ a $Mf(E_2) = f(E_1)$. Proto matice $f(E_1)$ a $f(E_2)$ mají stejnou hodnost a navíc jejich součet je jednotkovou maticí. Pokud by jejich hodnost byla nejvýše jedna, pak by $E = f(E_1) + f(E_2)$ měla hodnost nejvýše 2. Dále z $E_1E_2 = 0$ plyne $f(E_1)f(E_2) = 0$, tedy součet jejich hodností nesmí být vyšší než 3, neboli jejich hodnosti nesmí být větší než jedna. Proto žádný takový okruhový homomorfismus f neexistuje.

4. The answer is $n \geq 3$. It is immediate to see that $n = 2$ is not possible (each vertex of the big rectangle belongs to one of the smaller ones, so the two smaller rectangles must have a common side which leads to contradiction).

For $n \geq 3$ pick a real number $r > 1$, to be determined later. We construct a spiral of rectangles: The first rectangle with vertical side 1, horizontal side r. Add the second rectangle with horizontal side r, vertical side r^2 to share a horizontal side with the previous rectangle. For $k = 3, 4, \ldots, n - 1$ we add k-th rectangle in such a way that its shorter side coincide with the union of a longer sides of the $(k - 1)$-st rectangle and a shorter side of the $(k - 2)$-nd rectangle. We add the last rectangle in such a way that its *longer* side conincide with the union of a longer sides of the $(k - 1)$-st rectangle and a shorter side of the $(k - 2)$-nd rectangle.

Obviously, any two rectangles have different sizes. It remains to show that they are similar to the big rectangle (their union). Let $a(r)$ be the aspect ratio of the big rectangle. We want to find $r > 1$ such that $a(r) = r$. It is not difficult to show that $a(r)$ depends continuously on r (in fact, we can compute an explicit formula for $a(r)$ from a reccurent formula for the sizes of the rectangles). Further, for $r = 1$, we have a golden spiral and so $a(1) = F_{k+1}/F_k$ for some Fibanocci numbers and hence $a(1) > 1$. On the other hand, for $r \to \infty$ we have $a(r) = \frac{1}{r}(2 + o(1)) < r$ (this is obvious from a picture and can be proved using the explicit formula). Thus by intermediate value theorem there exists r with $a(r) = r$.