2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 13. 3. 2017.

Úloha 1. Najděte všechna n, pro něž má soustava rovnic

$$x_k^2 + x_{k+1}^2 + 50 = 16x_k + 12x_{k+1}, \qquad k = 1, \dots, n,$$

kde $x_{n+1} = x_1$, celočíselné řešení.

Úloha 2. Nechť $f \in C^3(\mathbb{R})$. Ukažte, že existuje $a \in \mathbb{R}$, pro které

$$f(a)f'(a)f''(a)f'''(a) \geq 0.$$

Úloha 3. Lze obarvit všechny body v prostoru pomocí pěti barev tak, aby se každou barvou obarvil alespoň jeden bod, ale aby žádná rovina neobsahovala čtyři různé barvy?

Úloha 4. (seriál) Existuje reálná 3×3 matice A taková, že $\operatorname{tr}(A) = 0$ a $A^2 + A^{\mathrm{T}} = E$?

⋆ **Úloha 5.** Nechť F je systém konečných podmnožin $\mathbb{N}$. Nechť pro všechny $A, B \in F$ platí $A \cap B \neq \emptyset$ a nechť všechny množiny v F mají stejnou velikost. Plyne odtud, že existuje konečná množina $Y \subset \mathbb{N}$ splňující $A \cap B \cap Y \neq \emptyset$ pro všechny $A, B \in F$?

⋆ **Úloha 6.** Nechť reálná čísla a_i, $i \in \mathbb{Z}$ splňují $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| < \infty$ a $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i = S \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_{i-n} + a_{i-n+1} + \cdots + a_{i+n}| = |S|.$$

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`