1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 27. 2. 2017.

Úloha 1. Zbyněk a Zbyšek hrají hru, ve které střídavě postupně doplňují číslice za desetinnou čárku čísla (Zbyněk nejprve zvolí číslici na pozici desetin, Zbyšek určí setiny, pak zase Zbyněk tisíciny atd.). Zbyněk vyhraje, pokud je po napsání všech číslic výsledné číslo racionální, Zbyšek naopak pokud je iracionální. Který z hráčů má vyhrávací strategii?

Úloha 2. Buď $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ Fibonacciho posloupnost, tj. $F(1) = F(2) = 1$, $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$, $n = 3, 4, \ldots$. Ukažte, že pro každé přirozené $n \geq 6$ leží (ostře) mezi $F(n)$ a $F(n+1)$ druhá mocnina nějakého přirozeného čísla.

Úloha 3. Na množině M všech bodů v rovině s kladnými celočíselnými souřadnicemi zaveďme uspořádání: $(x, y) \in M$ je větší (resp. menší) než $(x', y') \in M$, jestliže $x' \leq x$ a $y' \leq y$ (resp. $x' \geq x$ a $y' \geq y$). Buď S konečná podmnožina M, která s každým svým prvkem obsahuje i všechny menší prvky z M. Označme $R(z)$ počet prvků z S větších než z. Ukažte, že aspoň pro čtvrtinu bodů z S je $R(z)$ liché.

Úloha 4. Nechť polynom $P(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_0$ má právě m $(2 \leq m \leq n)$ různých komplexních kořenů. Dokažte, že aspoň jeden z koeficientů $p_{n-1}, \ldots, p_{n-m}$ je nenulový.

Úloha 5. Z každé posloupnosti neklesajících funkcí $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$ lze vybrat bodově konvergentní podposloupnost. Dokažte.

$\star$ **Úloha 6.** Je možné nakreslit do roviny kružnice takovým způsobem, aby každá přímka protnula aspoň jednu, ale žádná více než sto?

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`