6. soutěžní série

23. 5. 2016

Pozor, úlohy **nejsou** seřazeny podle obtížnosti!

Úloha 1. Pro reálná čísla a, b platí, že čísla $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$, $a^4 + b^4$ jsou racionální. Dokažte, že i číslo $a + b$ je racionální.

Úloha 2. Nechť a je reálné číslo různé od -1, 0, 1 a n přirozené číslo větší než 1. Nalezněte všechny polynomy P s reálnými koeficienty takové, že platí

$$(a^2x^2 + 1)P(ax) = (a^{2n}x^2 + 1)P(x).$$

Úloha 3. Nechť (X, ϱ) je souvislý metrický prostor. Dokažte, že pro každé $x, y \in X$ a $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ a body $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ splňující $x_0 = x$, $x_n = y$ a $\varrho(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ pro všechna $i < n$.

Úloha 4. Je dáno kladné celé číslo k. Bijekce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňuje: Kdykoli $|i - j| \leq k$, tak i $|f(i) - f(j)| \leq k$. Dokažte, že pak nutně $|f(i) - f(j)| = |i - j|$ pro všechna $i, j \in \mathbb{Z}$.