5. soutěžní série

9. 5. 2016

Úloha 1. Definujme $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ předpisem

$$f(n) = \frac{1}{n}\left(\left\lfloor\frac{n}{1}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor\right).$$

Dokažte, že f není monotónní na množině $\mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, n_0\}$ pro žádné přirozené n_0.

Úloha 2. V Řešitelově žije 4033 obyvatel. Libovolná skupina 2016 obyvatel Řešitelova má mezi zbývajícími 2017 obyvateli společného známého, tj. člověka, se kterým se všichni ze skupiny znají. Dokažte, že Řešitelští si mohou za starostu zvolit člověka, který se bude znát se všemi obyvateli.

Úloha 3. (seriál) Buď $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných čísel, která splňuje

$$d_{n+1} \le d_n - \frac{d_n^3}{4d_{n-1}^2} \quad \text{pro } n = 2, 3, \ldots.$$

Je $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ konvergentní?

Úloha 4. Celočíselné singulární 3×3 matice A, B spolu komutují. Dokažte, že existují $m, n \in \mathbb{Z}$ taková, že $\det(A^3 + B^3) = m^3 + n^3$.