4. soutěžní série – řešení

1. Záměnou x a y dostaneme $f(\ln x + \lambda \ln y) = f(\ln y + \lambda \ln x)$. Snadno pro každou dvojici a, $b \in \mathbb{R}$ najdeme x, $y > 0$ taková, že $a = \ln x + \lambda \ln y$ a $b = \ln y + \lambda \ln x$. Tedy f je konstantní. Označíme-li tuto konstantu C, pak jistě konstantní funkce $g = \frac{C}{2}$ vyhovuje a dosazením $x = y$ získáme, že jiná možnost není.

2. Snadno dokážeme indukcí, že následující posloupnost splňuje rekurenci i počáteční podmínky: $u_n = (n-1)\cdot(n-3)\cdot\dots\cdot 3\cdot 1$ pro n sudé a $u_n = (n-1)\cdot(n-3)\cdot\dots\cdot 4\cdot 2$ pro n lichá (tento předpis lze uhodnout z několika prvních členů). Zbývá dokázat, že tato posloupnost je jediným řešením (celočíselnost je pak evidentní). Důkaz indukcí: u_0, u_1, u_2 jsou jednoznačně určena a jsou nenulová. Je-li $u_n \neq 0$, pak $u_{n+3} = \frac{1}{u_n}(n! - u_{n+1}u_{n+2})$ je jednoznačně určeno, tj. je dáno výše uvedeným předpisem, tj. také u_{n+3} je nenulové).

3. Označme $S \subset 1\dots n$ množinu těch čísel, které dávají zbytek 0 nebo 1 modulo m. Tato množina se tak sestává z lichého počtu prvků: $1, m, m+1, 2m, \dots, \lfloor \frac{n}{m} \rfloor m$. Současně každých m po sobě jdoucích čísel z množiny $1\dots n$ obsahuje právě dva prvky z množiny S. Nakonec řekneme, že žárovka je důležitá, pokud její obě souřadnice jsou z množiny S. Takto v každém kroku přepneme dvě nebo žádnou důležitou žárovku, takže nezměníme paritu svítících důležitých žárovek. Na začátku svítí nula (sudý počet) důležitých žárovek, takže nelze docílit, aby svítily všechny (lichý počet) důležité žárovky.

4. Označme l_i polovinu délky úsečky s_i. Tedy $\sum l_i = \sqrt{n}$. Z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti plyne

$$n\left(\sum l_i^2\right) = \left(\sum 1\right)\left(\sum l_i^2\right) \geq \left(\sum l_i\right)^2 = n,$$

tedy $\sum l_i^2 \geq 1$. Nyní vezmeme úsečku s_i a otočíme ji dokola kolem středu – tak vznikne mezikruží M_i, jeho obsah označme S_i. Dále označme R_i, r_i poloměry vnější a vnitřní kružnice M_i, pak $S_i = \pi(R_i^2 - r_i^2)$. Nejdelší možná úsečka v tomto mezikruží je taková, která se dotýká kružnice s poloměrem r_i a dosahuje oběma konci na kružnici s poloměrem R_i – délka takové úsečky je $2(R_i^2 - r_i^2)$, takže $l_i \leq R_i^2 - r_i^2$. Celkem

$$\sum S_i = \pi \sum (R_i^2 - r_i^2) \geq \pi \sum l_i^2 \geq \pi.$$

Protože je každá úsečka uvnitř jednotkového kruhu, je každé $R_i < 1$, a proto jednotlivá mezikruží nepokryjí celý jednotkový kruh (a bude k pokrytí chybět část s kladným obsahem) s obsahem π. Protože je ale i součet obsahů mezikruží roven π, musí se některá dvě mezikruží protínat – tato odpovídají úsečkám, které lze protnout jednou kružnicí se středem v počátku.