4. domácí série

18. 4. 2016

Úloha 1. Lze rozdělit pětiboký hranol na několik trojbokých jehlanů tak, aby podstava každého z jehlanů byla částí jedné z podstav původního hranolu?

Úloha 2. Mirek má tisíc jednotkových kostiček takových, že na každé jsou dvě protější strany červeně, další dvě protější modře a zbylé dvě žlutě. Mirek z nich poskládal krychli $10 \times 10 \times 10$ tak, aby se sousední krychličky dotýkaly stejnou barvou. Dokažte, že alespoň jedna stěna výsledné krychle bude nutně jednobarevná.

Úloha 3. (seriál) Buďte $x_1 = 1$ a $x_{n+1} = x_n + 2 + 1/x_n$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Ukažte, že posloupnost $y_n = 2n + \frac{1}{2}\log n - x_n$, $n = 1, 2, \ldots$ je pro velká n rostoucí (tj. existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že $y(n+1) > y(n)$ pro všechna $n \geq n_0$).

Úloha 4. Ukažte, že soustava

$$\begin{aligned}(a+1)(b+1) &\equiv 1 \pmod{c},\\ (b+1)(c+1) &\equiv 1 \pmod{a},\\ (c+1)(a+1) &\equiv 1 \pmod{b}\end{aligned}$$

má nekonečně mnoho řešení v $\mathbb{N}^3$. Ukažte, že jen konečně mnoho z nich spňuje $\mathrm{nsd}(a, b) = 1$ a najděte je.

⋆ **Úloha 5.** Buď $n \geq 3$ přirozené a $\theta = 2\pi/n$. Vypočtěte determinant $n \times n$ matice $A + I$, kde I je jednotková matice a $A = (a_{jk})_{j,k=1}^{n}$, $a_{jk} = \cos(j\theta + k\theta)$.

⋆ **Úloha 6.** Najděte všechny funkce $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ splňující

$$\sqrt{3}f(2x) + 5f(2y) = 2f(\sqrt{3}x + 5y)$$

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`