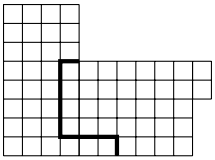
3. soutěžní série – řešení

1. Takto:



2. Najdeme rekurenci pro P_n:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(x)(x^k-1)^{n+1} - P_n(x)(n+1)(x^k-1)^n k x^{k-1}}{(x^k-1)^{2n+2}} \\ &= \frac{P_n'(x)(x^k-1) - P_n(x)(n+1)k x^{k-1}}{(x^k-1)^{n+2}}, \end{aligned}$$

takže $P_{n+1}(x) = P_n'(x)(x^k-1) - P_n(x)(n+1)kx^{k-1}$ a $P_{n+1}(1) = -(n+1)kP_n(1)$. Protože $P_0(1) = 1$, máme snadno indukcí $P_n(1) = (-k)^n n!$.

3. Mějme $\varepsilon > 0$; najdeme $M \in \mathbb{N}$ takové, že $\int_M^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$. Na intervalu $[0, M+1]$ je f stejnoměrně spojitá, existuje tedy $N \in \mathbb{N}$, $N \geq M$ takové, že $|f(x) - f(x+1/n)| < \varepsilon/M$ pro $x \in [0, M]$ a $n \geq N$. Pro $n \geq N$ tedy máme

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left| f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right| \mathrm{d}x &= \int_0^M \left| f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right| \mathrm{d}x + \int_M^\infty \left| f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right| \mathrm{d}x \\ &< \frac{\varepsilon}{M}(M-0) + \int_M^\infty \left| f\left(x+\frac{1}{n}\right)\right| \mathrm{d}x + \int_M^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

4. Nemusí. Uvažme bázi $B = (b_1, b_2, b_3)$ a nenulový vektor $u = b_1 + b_2$. Pak definujeme

$$f_i(v) = v + u([v]_B)_i.$$

Jistě budou tři obrazy lineárně vždy závislé, protože leží v lineárním obalu dvou vektorů u, v. Samotná zobrazení ale jsou lineárně nezávislá, jak je patrno z jejich matic (stačí pozice $a_{2,1}$, $a_{1,2}$, $a_{1,3}$):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$