2. soutěžní série – řešení

1. Je to možné. Dáme dohromady 15 hyperkvádrů natočených jako $2 \times 1 \times 3 \times 4$, čímž dostaneme $2 \times 5 \times 3 \times 12$. Dále vezmeme 20 natočených $2 \times 1 \times 4 \times 3$, ze kterých dostaneme $2 \times 5 \times 4 \times 12$. Složením těchto dvou dostaneme požadovaný hyperkvádr.

2. Uvažujme matici

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 2n \\ 3 & 2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 3 & \ddots & 0 & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

d_n její determinant a matici $\tilde{A}_{2n-1}$, která vznikne z A_{2n} vynecháním prvního sloupce a prvního řádku. Pak rozvojem podle prvního řádku dostaneme $d_n = \det \tilde{A}_{2n-1} - 2n3^{2n-1}$ a rozvojem matice $\tilde{A}_{2n-1}$ podle prvního řádku $\det \tilde{A}_{2n-1} = 2d_{n-1} + (2n-1)3^{2n-2}$, tedy dohromady máme rekurenci

$$d_n - 2d_{n-1} = 9^{n-1}(-4n-1).$$

Řešení diferenční rovnice s nulovou pravou stranou $d_n - 2d_{n-1} = 0$ dává řešení $d_n = c2^n$. Partikulární řešení pro nenulovou pravou stranu hledáme ve tvaru $9^n(an+b)$. Dosadíme-li tento tvar partikulárního řešení do rovnice, dostáváme

$$9^n(an+b) - 2 \cdot 9^{n-1}(a(n-1)+b) = 9^{n-1}(-4n-1),$$

odkud snadno $n(9a-2a)+9b+2a-2b = -4n-1$, tj. $a = -\frac{4}{7}$, $b = \frac{1}{49}$. Obecné řešení diferenční rovnice je tedy $d_n = c2^n - \frac{1}{49}(28n-1)9^n$. Dosazením počáteční podmínky $d_1 = 1\cdot 1 - 2\cdot 3 = -5$ dostáváme $c = -\frac{1}{49}$, tj.

$$d_{1008} = \frac{1}{49}\left(-2^{1008} - (28 \cdot 1008 - 1)9^{1008}\right).$$

3. Nechť taková funkce existuje. Úpravou dostaneme $f(x+y) \le \frac{f(x)^2}{f(x)+y} = f(x) - \frac{f(x)y}{f(x)+y}$. Tedy f je klesající. Zvolme nyní $x > 0$ pevně a n tak velké, aby $nf(x+1) > 1$. Pak pro $k = 0, 1, \dots, n-1$ máme

$$f(x + \frac{k}{n}) - f(x + \frac{k+1}{n}) \ge \frac{f(x+k/n)}{nf(x+k/n)+1} \ge \frac{1}{2n},$$

protože funkce $t \mapsto \frac{t}{nt+1}$ je rostoucí na $(0, +\infty)$. Posčítáním těchto nerovností dostaneme $f(x) - f(x+1) \ge \frac{1}{2}$. Tato nerovnost platí pro každé x, tj. $f(x+m)$ bude záporné pro m dost velké, spor.

4. Ukážeme, že součet druhých mocnin počtu kokosů v jednotlivých bedýnkách po každém přesunu vzroste – tím bude tvrzení dokázáno, jelikož pro fixní počet kokosů může tento výraz nabývat jen konečně mnoha hodnot.

Uvažme bedýnky $b_1, \dots, b_4$, pro které je možné provést přesun. Potom

$$b_3 + b_4 - b_1 - b_2 + 2k > 0,$$
$$2kb_3 + 2kb_4 - 2kb_1 - 2kb_2 + 4k^2 > 0,$$
$$(b_3+k)^2 + (b_4+k)^2 + (b_1-k)^2 + (b_2-k)^2 > b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2,$$

což jsme chtěli.