1. soutěžní série – řešení

1. Může jich obsahovat $n^2 - n + 1$. Například má všude jedničky, jen těsně pod diagonálou nuly. Po odečtení prvního řádku od ostatních získáme matici, která má jedničky jen na prvním řádku a pak těsně pod diagonálou. Po následném odečtení ostatních řádků od posledního získáme permutační (tedy invertibilní) matici, takže i původní byla invertibilní.

Naopak, když by matice obsahovala více než $n^2 - n + 1$ jedniček, obsahovala by nejvýše $n - 2$ nejedniček, takže by celé dva její řadky byly plné jedniček a tedy totožné. Taková matice by nutně byla singulární.

2. Jsou-li v, w lineárně závislé, pak umíme najít α a β ne obě nulová taková, že $\alpha v + \beta w = 0$, a máme hotovo. V opačném případě nechť ν je (jediné) regulární lineární zobrazení $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ splňující $\nu(v) = (1, 0)$, $\nu(w) = (0, 1)$.

Uvažme lineární zobrazení $\theta\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dané předpisem $(a, b) \mapsto a\nu(x) + b\nu(y)$. Buď (α, β) nějaký vlastní vektor θ (ten existuje, jelikož pracujeme nad $\mathbb{C}$) s vlastním číslem k; pak

$$k(\alpha\nu(v) + \beta\nu(w)) = k(\alpha, \beta) = \theta((\alpha, \beta)) = \alpha\nu(x) + \beta\nu(y).$$

Aplikací ν^{-1} dostáváme požadovanou lineární závislost ze zadání.

3. Rozmyslete si, že f musí mít pevný bod v $[0, 1]$. Je-li s pevný bod funkce f, pak s není pevný bod funkce g. Je-li s pevný bod funkce f, pak také $g(s)$ je pevný bod funkce f. Množina pevných bodů funkce f je uzavřená, tj. má minimum m a maximum M. Pak $g(m) > m = f(m)$ ($g(m)$ je pevný bod f, proto je $g(m) \geq m$, ale $g(m) = m$ nelze) a podobně $g(M) < M = f(M)$. Pak ale z Rolleovy věty exisutje bod $t \in [m, M]$, že $f(t) = g(t)$, což je spor.

4. Úlohu vyřešíme indukcí podle k. Pro $k = 0$ je tvrzení triviálně splněno (prázdná posloupnost transpozic). Nyní předpokládejme, že pro menší k máme posloupnost nalezenou. Současnou posloupnost sestrojíme takto: Nejprve použijeme transpozice $(1, \frac{n}{2} + 1), (2, \frac{n}{2} + 2), \dots (\frac{n}{2}, n)$. Následují transpozice z indukčního předpokladu na množině $[\frac{n}{2}]$. Pak použijeme ještě jednou transpozice z indukčního předpokladu, tentokrát posunuté o $\frac{n}{2}$, tedy na množině $\{\frac{n}{2} + 1, \dots, n\}$. Nakonec zopakujeme transpozice jako na začátku, tedy $(1, \frac{n}{2} + 1), \dots, (\frac{n}{2}, n)$. Takto jsme použili dvakrát více transpozic než v indkčním předpokladu a ještě o dvakrát $\frac{n}{2}$ víc. Předchozí posloupnost byla dlouhá $(k - 1) \cdot \frac{n}{2}$, takže tato je dlouhá $(k - 1)n + n = kn$. Zbývá ukázat, že splňuje zadanou podmínku.

Máme zadané cílové pořadí čísel $a_1, \dots, a_n$, které chceme dostat aplikací nějaké podposloupnosti transpozic. Transpozice interpretujeme jako prohození čísel na daných pozicích (nikoli daných čísel). Dále chápejme čísla $1, 2, \dots n$ jako vrcholy multigrafu. Pokud se dvě čísla liší o $\frac{n}{2}$, spojíme je modrou hranou a čísla a_x, a_y přitom spojíme červenou hranou. Takto jsou všechny vrcholy rozděleny na dvoubarevné cykly, každý z těchto cyklů orientujeme.

Na začátku aplikujeme ty transpozice, aby začátky modrých hran ležely na pozicích $\leq \frac{n}{2}$. Obdobně na problém jdeme od konce a aplikujeme na posloupnost $a_1, \dots a_n$ ty transpozice, aby konce červených hran ležely na pozicích $\leq \frac{n}{2}$. Mezi počátečním a cílovým stavem tak už jen stačí vhodně přeházek čísla na pozicích $\{1, \dots, \frac{n}{2}\}$ a pak na pozicích $\{\frac{n}{2} + 1, \dots, n\}$, což je možné díky indukčnímu předpokladu.