Sčítání nekonečných řad – metody

1. Známé řady. Hlavně geometrická řada, dále nějaké Taylorovy rozvoje:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q,} \quad |q| < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \quad x \in \mathrm{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sin x, \quad x \in \mathrm{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x, \quad x \in \mathrm{R}$$

2. Teleskopické řady. Nejčastější metoda v soutěžních úlohách. Např.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{N+1}\right) = 1,$$

neboť v předposledním kroku se všechny členy kromě prvního a posledního odečtou:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots - \frac{1}{N} + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

3. Mocninné řady. Metoda vyučovaná v základním kurzu matematické analýzy: chceme sečíst řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Definujme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}.$$

Tato řada má poloměr konvergence jedna, pro $|x| < 1$ platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n, \quad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Zintegrováním dostaneme

$$f'(x) = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + c = -\ln(1-x),$$

dosazením do řady totiž vidíme, že $f'(x) = 0$, takže $c = 0$. Další integrací pak

$$f(x) = \int -\ln(1-x) dx = (1-x)\ln(1-x) - 1 + x + d = (1-x)\ln(1-x) + x.$$

Dle Abelovy věty je pak

$$f(1) = \lim_{x \to 1-} (1-x)\ln(1-x) + x = 1.$$

4. Fourierovy řady. Podívejte se například na následující odkaz, jak pomocí Fourierových řad sečíst $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$: `http://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem`. K tomu se hodí umět pracovat s Fourierovými řadami a také znát Fourierovy řady některých funkcí (jako třeba $f(x) = x$ na $(-\pi, \pi)$).

Možná sem ještě něco přidám...