6. domácí série

11. 5. 2015

Úloha 1. Řekneme, že konečná množina $A \subset \mathbb{N}$ je *sobecká*, jestliže $\#A \in A$ ($\#A$ značí počet prvků množiny A) a *minimální sobecká*, jestliže je sobecká a žádná její vlastní podmnožina sobecká není. Určete počet minimálních sobeckých podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Úloha 2. Uvnitř pravidelného čtyřstěnu zvolíme bod X a změříme jeho vzdálenost od všech čtyř stěn. Dokažte, že součet těchto vzdáleností nezávisí na volbě X.

Úloha 3. Nechť A, B, C jsou čtvercové reálné matice téhož rozměru. Dokažte

$$\operatorname{tr}\big(A(A^{\mathrm{T}} - B^{\mathrm{T}}) + B(B^{\mathrm{T}} - C^{\mathrm{T}}) + C(C^{\mathrm{T}} - A^{\mathrm{T}})\big) \geq 0.$$

Úloha 4. (Seriál 1) Pro $a, b \in \mathbb{N}_0$ sečtěte

$$\sum_k \binom{a+b}{a+k}\binom{b+a}{b+k}(-1)^k.$$

Úloha 5. Ukažte, že množina všech lineárních kombinací polynomů $x^n + x^{n^2}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je hustá v $C([0,1])$.

Úloha 6. Je dáno přirozené číslo n. Dokažte, že $2^a + a$ je dělitelné číslem n pro nějaké přirozené číslo a.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`